## Aula 10

**10.01.** c

Como $|x| \geq 0$, para todo x real, o conjunto imagem da função f é $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

**10.02.** c

$$|x-10| = 50 \Rightarrow x-10 = 50 \text{ ou } x-10 = -50$$
$$\Rightarrow x = 60 \text{ ou } x = -40$$

A soma das soluções reais da equação é $60 + (-40) = 20$.

**10.03.** b

$$\sqrt{(x-2)^2} = 5$$
$$|x-2| = 5 \Rightarrow x-2 = 5 \text{ ou } x-2 = -5$$
$$\Rightarrow x = 7 \text{ ou } x = -3$$

A maior solução da equação é 7.

**10.04.** b

$$|3x-1| = 2 \Rightarrow 3x-1 = 2 \text{ ou } 3x-1 = -2$$
$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

O produto das soluções é $1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

**10.05.** c

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Portanto, o módulo de um número real é igual ao próprio número (se o número for positivo) ou igual ao oposto do número (se o número for negativo).

**10.06.** e

$$|x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9$$

**10.07.** b

$$|x| > 9 \Rightarrow x < -9 \text{ ou } x > 9$$

**10.08.** a

$$A = \left|\left|\left|\sqrt{2}-2\right|-3\right|-1\right|$$
$$\sqrt{2}-2 < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{2}-2\right| = 2-\sqrt{2}$$
$$A = \left|\left|2-\sqrt{2}-3\right|-1\right| = \left|\left|-1-\sqrt{2}\right|-1\right|$$
$$-1-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \left|-1-\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2}$$
$$A = \left|1+\sqrt{2}-1\right|$$
$$A = \left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$$

**10.09.** a

Como $\left|x^2\right| = |x|^2$, temos:

$$|x|^2 - 4 \cdot |x| - 5 = 0$$

- $|x| = y$

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \text{ ou } y = -1$$

- $|x| = 5 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$
- $|x| = -1$ (não existe solução)

Portanto, o conjunto-solução da equação é {–5, 5}, ou seja, os elementos são números inteiros, sendo um deles natural.

**10.10.** e

$$2-\sqrt{5} < 0 \Rightarrow \left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2$$
$$3-\sqrt{5} > 0 \Rightarrow \left|3-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}$$
$$\left|2-\sqrt{5}\right| + \left|3-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} = 1$$

**10.11.** d

$$0 < |2x+2| \leq 6$$
$$|2x+2| > 0 \text{ e } |2x+2| \leq 6$$
$$|2x+2| > 0$$

Essa desigualdade é verdadeira para todo x tal que:

$$2x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$
$$|2x+2| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq 2x+2 \leq 6$$
$$\Rightarrow -8 \leq 2x \leq 4$$
$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

Os números inteiros que satisfazem a sentença são:
–4, –3, –2, 0, 1, 2
A soma desses números é –6.

**10.12.** a

$$|x| = y$$
$$y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -4$$

- $|x| = 3 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$
- $|x| = -4$ (não existe solução)

Portanto, a soma das raízes é igual a zero e o produto é igual a –9.

**10.13.** a

$$\left|x^2-5x\right| = |x-5| \Rightarrow x^2-5x = x-5 \text{ ou } x^2-5x = -x+5$$

- $x^2 - 5x = x - 5$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

- $x^2 - 5x = -x + 5$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 5$$

O conjunto solução da equação é {–1, 1, 5}.

**10.14.** e

$$|x-2| < 5 \Rightarrow -5 < x-2 < 5$$
$$\Rightarrow -3 < x < 7$$

Os números inteiros não negativos que satisfazem a inequação são:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (7 números).

**10.15.** b

Note que os pontos (0, 2), (2, 0) e (4, 2) pertencem ao gráfico da função f.
Assim:

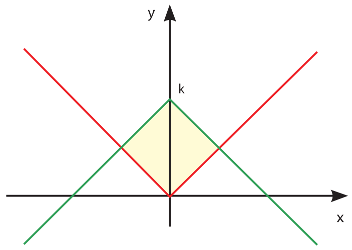
$$f(0) = 2$$
$$f(2) = 0$$
$$f(4) = 2$$

Das alternativas, a única função que verifica essas igualdades é $f(x) = |x-2|$.

$f(0) = |0 - 2| = |-2| = 2$
$f(2) = |2 - 2| = |0| = 0$
$f(4) = |4 - 2| = |2| = 2$

**10.16.** a

Observe os gráficos das funções:




Os gráficos das funções delimitam um quadrado cujas diagonais medem **k**. Seja **L** a medida dos lados desse quadrado.

Assim:

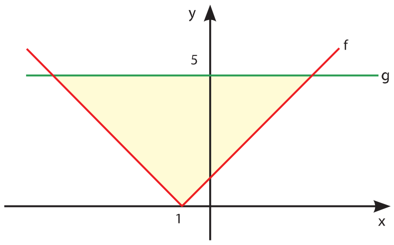
$L\sqrt{2} = k \Rightarrow L = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$

$L^2 = 16$

$L = 4$

$\dfrac{k}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow k = 4\sqrt{2}$

**10.17.** d




$f(x) = g(x)$

$|x - 1| - 5 \Rightarrow x - 1 = 5 \text{ ou } x - 1 = -5$

$\Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = -4$

Os pontos de intersecção dos gráficos das funções **f** e **g** são (6, 5) e (–4, 5).

Assim, a região limitada pelos gráficos de f e g é um triângulo cuja base mede 6 – (–4) = 10 e cuja altura é 5.

Área do triângulo:

$\dfrac{10 \cdot 5}{2} = 25$ unidades de área

**10.18.** b

$|x - 2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 5$

$|3x - 2| > 5 \Rightarrow 3x - 2 < -5 \text{ ou } 3x - 2 > 5$

$\Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > \dfrac{7}{3}$

Os valores inteiros que satisfazem simultaneamente as desigualdades são 3, 4 e 5.

O produto desses números é 60.

**10.19.** $f(x) < 0$

$|x - 1| - 1 < 0$

$|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1$

$\Rightarrow 0 < x < 2$

Portanto:

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$.

**10.20.** 12

$|x - 2| = 3x^2 \Rightarrow x - 2 = 3x^2 \text{ ou } x - 2 = -3x^2$

• $x - 2 = 3x^2$

$3x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

• $x - 2 = -3x^2$

$3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \dfrac{2}{3}$

Assim:

$S = -1 + \dfrac{2}{3}$

$S = -\dfrac{1}{3}$

$9S + 15 = 9 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 15 = -3 + 15 = 12$

# Aula 11

**11.01.** c

$f(-x) = f(x)$

$x = 2 \Rightarrow f(-2) = f(2) \Rightarrow f(-2) - f(2) = 0$

**11.02.** d

$f(-x) = -f(x)$

$x = 10 \Rightarrow f(-10) = -f(10) \Rightarrow f(-10) + f(10) = 0$

**11.03.** d

a) INCORRETO.

$f(-x) = 4 \cdot (-x) = -4x = -f(x)$

Assim, elementos opostos têm imagens opostas.

b) INCORRETO.

Como $f(-x) = -f(x)$, a função f é ímpar.

c) INCORRETO.

$f(0) = 4 \cdot 0 = 0$

O gráfico da função passa pelo ponto (0, 0).

**11.04.** c

a) $f(-x) = 10 = f(x)$

A função é par.

b) $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$

A função é par.

c) $f(-x) = 10 - (-x) = 10 + x \neq f(x)$

A função não é par.

d) $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$

A função é par.

e) $f(-x) = (-x)^2 - 3 \cdot (-x)^6 = x^2 - 3x^6 = f(x)$

A função é par.

**11.05.** d

a) $f(-x) = 10 \cdot (-x) = -10x = -f(x)$

A função é ímpar.

b) $f(-x) = (-x)^3 - 5 \cdot (-x) = -x^3 + 5x = -f(x)$

A função é ímpar.

c) $f(-x) = -(-x) = x = -f(x)$

A função é ímpar.

d) $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$

A função é par.

e) $f(-x) = -x - 2 \cdot (-x)^3 = -x + 2x^3 = -f(x)$

A função é ímpar.

**11.06.** d

Sabe-se que:

- $f(-x) = -f(x)$
- $f(a) = b$

1) CORRETA.

$f(-a) = -f(a) = -b$

2) CORRETA.

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

3) INCORRETA.

Como $f(a) > 0$ e $f(-a) < 0$, então $f(a) \cdot f(-a) < 0$.

4) CORRETA.

Portanto, o número de afirmações corretas é 3.

**11.07.** d

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

$f(2) = 3 \Rightarrow a \cdot (2 + 1) \cdot (2 - 1) = 3 \Rightarrow a = 1$

Assim:

$f(x) = 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

$f(x) = x^2 - 1$

1) CORRETA.

$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$

2) CORRETA.

$f(0) = 0^2 - 1 = -1$

3) CORRETA.

$f(-2) + f(-1) + f(1) + f(2) = 3 + 0 + 0 + 3 = 6 > 0$

4) INCORRETA.

Como a função f é par, valores opostos de x têm imagens iguais.

Portanto, o número de afirmações corretas é 3.

**11.08.** b

a) $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

A função é ímpar.

b) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$

A função é par.

c) $f(-x) = -x = -f(x)$

A função é ímpar.

d) $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$

A função é ímpar.

**11.09.** e

a) INCORRETO.

O gráfico da função não é simétrico em relação à origem.

b) INCORRETO.

O gráfico da função não é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

c) INCORRETO.

$f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$

d) INCORRETO.

$f(-1) > f(1)$

e) CORRETO.

**11.10.** c

$f(-x) = -f(x)$

$$E = \sum_{k=-3}^{3} f(x_k) = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$E = [f(-3) + f(3)] + [f(-2) + f(2)] + [f(-1) + f(1)] + f(0)$

$E = f(0)$

$E = 0$

**11.11.** c

a) INCORRETO.

$f(-k) = -f(k)$, para todo k real.

b) INCORRETO.

$f(-2\pi) = -f(2\pi)$

$f(-2\pi) + f(2\pi) = 0$

c) CORRETO.

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

d) INCORRETO.

$f(0) = 0$

e) INCORRETO.

$f(k) = f(-k)$ para todos os valores de k tais que $f(k) = 0$.

**11.12.** e

a) INCORRETO.

$f(-k) = f(k)$, para todo k real.

b) INCORRETO.

$f(-2\pi) = f(2\pi) > 0$

$f(-2\pi) + f(2\pi) > 0$

c) INCORRETO.

$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

d) INCORRETO.

$f(0) > 0$

e) CORRETO.

**11.13.** c

a) $f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$

$f(-x) = tg(-x) = \frac{sen(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sen(x)}{cos(x)} = -tg(x) = -f(x)$

A função é ímpar.

b) $f(x) = cotg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$

$f(-x) = cotg(-x) = \frac{cos(-x)}{sen(-x)} = \frac{cos(x)}{-sen(x)} = -cotg(x) = -f(x)$

A função é ímpar.

c) $f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$

$f(-x) = sec(-x) = \frac{1}{cos(-x)} = \frac{1}{cos(x)} = sec(x) = f(x)$

A função é par.

d) $f(-x) = cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$

$f(-x) = cossec(-x) = \frac{1}{sen(-x)} = \frac{1}{-sen(x)} = -cossec(x) = -f(x)$

A função é ímpar.

e) $f(x) = sen^2(x)$

$f(-x) = sen^2(-x) = [-sen(x)]^2 = sen^2(x) = f(x)$

A função é par.

**11.14.** b

I. INCORRETA.

O gráfico da função é formado por duas semirretas.

II. INCORRETA.

Para todo x real, tem-se $f(x) \geq 0$.

III. CORRETA.

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

IV. INCORRETA.

Portanto, o número de afirmativas corretas é 1.

**11.15.** e

a) INCORRETO.

$f(x) = senx$ é uma função ímpar.

b) INCORRETO.

$f(x) = cosx$ é uma função par.

c) INCORRETO.

$f(-x) = -f(x)$

$g(-x) = -g(x)$

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = h(x)$

O produto de duas funções ímpares é uma função par.

d) INCORRETO.

$f(-x) = -f(x)$

$g(-x) = g(x)$

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot g(x) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$

O produto de uma função ímpar por uma função par é uma função ímpar.

e) CORRETO.

$f(-x) = f(x)$

$g(-x) = g(x)$

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$

O produto de duas funções pares é uma função par.

**11.16.** 29

$f(x+1) = 2 \cdot f(x) - 15$

$x = 0 \Rightarrow f(0+1) = 2 \cdot f(0) - 15$

$f(1) = 2 \cdot f(0) - 15$

$43 = 2 \cdot f(0) - 15 \Rightarrow f(0) = 29$

**11.17.** c

$f(x+1) = f(x) + f(1)$

$x = 1 \Rightarrow f(1+1) = f(1) + f(1)$

$f(2) = 2 \cdot f(1)$

$1 = 2 \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

$x = 2 \Rightarrow f(2+1) = f(2) + f(1)$

$f(3) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x = 3 \Rightarrow f(3+1) = f(3) + f(1)$

$f(4) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$x = 4 \Rightarrow f(4+1) = f(4) + f(1)$

$f(5) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

**11.18.** 5

$f(2 \cdot x) = 3 \cdot f(x)$

$x = 4 \Rightarrow f(2 \cdot 4) = 3 \cdot f(4)$

$f(8) = 3 \cdot f(4) \Rightarrow 45 = 3 \cdot f(4) \Rightarrow f(4) = 15$

$x = 2 \Rightarrow f(2 \cdot 2) = 3 \cdot f(2)$

$f(4) = 3 \cdot f(2) \Rightarrow 15 = 3 \cdot f(2) \Rightarrow f(2) = 5$

**11.19.** $f(-x) = f(x)$

$a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c = ax^2 + bx + c$

$ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c$

Comparando os dois membros da igualdade, temos:

$-b = b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Portanto:

$a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$b = 0$

$c \in \mathbb{R}$

**11.20.** $f(-x) = -f(x)$

$a \cdot (-x) + b = -ax - b$

$-ax + b = -ax - b$

Comparando os dois membros da igualdade, temos:

$b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Portanto:

$a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$b = 0$

## Aula 12

**12.01.** b

A imagem da função **g** para cada número real **x** é uma unidade maior que a imagem da função **f** para o mesmo número **x**.

Assim:

$g(x) = f(x) + 1$

**12.02.** d

A imagem da função **g** para cada número real **x** é igual à imagem da função **f** para esse mesmo número **x** aumentado de uma unidade.

Assim:

$g(x) = f(x + 1)$

**12.03.** c

$g(x) = f(x + 2)$

$g(x) = (x + 2 - 1)^2$

$g(x) = (x + 1)^2$

**12.04.** c

a) INCORRETA.
Vértice da parábola azul: (1, 0)
Vértice da parábola verde: (–1, 0)

b) INCORRETA.
As duas parábolas têm o vértice no eixo das abscissas.

c) CORRETA.
O conjunto imagem de ambas as funções é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

d) INCORRETA.
Ambas as funções têm ponto de mínimo.

**12.05.** a

$Im(g) = [-2 + 3, \infty)$

$Im(g) = [1, \infty)$

**12.06.** a

O gráfico da função definida por $y = |x|$ é constituído por duas semirretas com origem no ponto (0, 0).

O gráfico da função $f(x) = |x| + 2$ é obtido por uma translação do gráfico de $y = |x|$, duas unidades para cima. Portanto, é constituído por duas semirretas com origem no ponto (0, 2).

**12.07.** c

$Im(f) = [-1, 1]$

$Im(g) = [-1 + 2, 1 + 2]$

$Im(g) = [1, 3]$

**12.08.** d

O gráfico da função **g** é obtido por uma translação do gráfico da função **f**, uma unidade para a esquerda.

Assim:

$g(x) = f(x + 1)$

$g(x) = |x + 1|$

**12.09.** b

Primeira translação:

$h(x) = f(x - 3)$

$h(x) = (x - 3 + 1)^2$

$h(x) = (x - 2)^2$

Segunda translação:

$g(x) = h(x) + 2$

$g(x) = (x - 2)^2 + 2$

**12.10.** d

Os gráficos das funções **f** e **g** são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Assim:

$g(x) = -f(x)$

$g(x) = -(x - 1) \cdot (x - 3)$

$g(x) = (-x + 1) \cdot (x - 3)$

**12.11.** c

O gráfico da função **h** é obtido por uma translação do gráfico da função **f**, quatro unidades para a esquerda.

Assim:

$h(x) = f(x + 4)$

$h(x) = (x + 4 - 1) \cdot (x + 4 - 3)$

$h(x) = (x + 3) \cdot (x + 1)$

Outra maneira de escrever a lei de formação da função h:

$h(x) = (-1) \cdot (-x - 3) \cdot (-1) \cdot (-x - 1)$

$h(x) = (-x - 3) \cdot (-x - 1)$

**12.12.** b

I. CORRETA. O gráfico do segundo quadrante é simétrico em relação ao gráfico do primeiro, em relação ao eixo das ordenadas. (Reflexão em torno do eixo das ordenadas)
$y = f(-x)$

III. CORRETA. O gráfico do quarto quadrante é simétrico em relação ao gráfico do primeiro, em relação ao eixo das abscissas. (Reflexão em torno do eixo das abscissas)
$y = -f(x)$

II. CORRETA. O gráfico do terceiro quadrante é simétrico em relação ao gráfico do primeiro, em relação à origem. (Reflexão em torno do eixo das abscissas e em torno do eixo das ordenadas)
$y = -f(-x)$

**12.13.** b

Observe alguns valores de **f** e **g**:

$f(-1) = -1 \quad g(-1) = 3$

$f(0) = 0 \quad g(0) = 2$

$f(1) = 1 \quad g(1) = 1$

$f(2) = -1 \quad g(2) = 3$

A relação que satisfaz todos esses valores é:

$g(x) = 2 - f(x)$

**12.14.** e

$P(x - 1) = 2x + 1$

$P(x + 1 - 1) = 2 \cdot (x + 1) + 1$

$P(x) = 2x + 2 + 1$

$P(x) = 2x + 3$

**12.15.** b

Observe alguns valores da função f:

$f(-2) = -1$

$f(-1) = -2$

$f(0) = 0$

$f(1) = 2$

$f(2) = 1$

Sendo $g(x) = 2 \cdot f(x - 1)$, temos:

$g(-1) = 2 \cdot f(-1 - 1) = 2 \cdot f(-2) = 2 \cdot (-1) = -2$

$g(0) = 2 \cdot f(0 - 1) = 2 \cdot f(-1) = 2 \cdot (-2) = -4$

$g(1) = 2 \cdot f(1 - 1) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 0 = 0$

$g(2) = 2 \cdot f(2 - 1) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$

Portanto, o gráfico da função que satisfaz todos esses valores é o da alternativa b.

**12.16.** b

$f(x-1)=2x$

$f(x-1-1)=2\cdot(x-1)$

$f(x-2)=2x-2$

**12.17.** e

Se $g(x)=f(|x|)$

$x\geq 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow g(x)=f(x)$

$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow g(x)=f(-x)$

Assim:

$g(0)=f(0)$

$g(1)=f(1)$

$g(2)=f(2)$

$\vdots$

Para $x\geq 0$ os gráficos das funções **f** e **g** são iguais.

$g(-1)=f(|-1|)=f(1)$

$g(-2)=f(|-2|)=f(2)$

$g(-3)=f(|-3|)=f(3)$

$\vdots$

Para $x<0$ o gráfico da função **g** é a reflexão da parte do gráfico da função **f** em que $x>0$.

Portanto, o gráfico que melhor representa a função **g** é o da alternativa e.

**12.18.** a

**1.** $y=|f(x)|$

Pontos com ordenada positiva ou nula se mantêm. Pontos com ordenada negativa são refletidos em torno do eixo das abscissas.

**2.** $y=-f(x)$

Reflexão em torno do eixo das abscissas.

**3.** $y=f(-x)$

Reflexão em torno do eixo das ordenadas.

**4.** $y=f(x+2)$

Translação do gráfico de duas unidades para a esquerda.

**5.** $y=f(x)+2$

Translação do gráfico de duas unidades para cima.

Portanto:

1c – 2a – 3e – 4b – 5d

**12.19.** $Im(f)=[-1, \infty[$

Seja $h(x)=f(x)+2$.

$Im(h)=[-1+2, \infty[$

$Im(h)=[1, \infty[$

Assim:

$g(x)=-[f(x)+2]$

$g(x)=-h(x)$

$Im(g)=]-\infty, -1]$

**12.20.** a) $f(x)=x^2-6x+8$

O valor mínimo da função é a ordenada do vértice da parábola correspondente.

$$y_V=-\frac{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}{4\cdot1}=-\frac{36-32}{4}=-1$$

Pontos de intersecção do gráfico de **f** com a reta $y=1$.

$f(x)=1$

$x^2-6x+8=1$

$x^2-6x+7=0 \Rightarrow x=3+\sqrt{2}$ ou $x=3-\sqrt{2}$

Os pontos são:

$(3+\sqrt{2}, 1)$ e $(3-\sqrt{2}, 1)$

b) $g(x)=|x^2-6x+8|-1$

$g(x)=0$

$|x^2-6x+8|-1=0$

$|x^2-6x+8|=1 \Rightarrow x^2-6x+8=1$ ou $x^2-6x+8=-1$

• $x^2-6x+8=1$

$x^2-6x+7=0 \Rightarrow x=3+\sqrt{2}$ ou $x=3-\sqrt{2}$

• $x^2-6x+8=-1$

$x^2-6x+9=0 \Rightarrow x=3$

As raízes da equação são:

$3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$ e 3

## Aula 10

**10.01.** d

A média anual dos 5 anos é dada por:

$$\overline{X}=\frac{300+400+400+450+500}{5}$$

$$\overline{X}=\frac{2050}{5}=410$$

**10.02.** b

Média aritmética dos números 4 e 36:

$$\overline{X}=\frac{4+36}{2}=\frac{40}{2}=20$$

Média geométrica dos números 4 e 36:

$$\overline{X}_G=\sqrt{4\cdot 36}=2\cdot 6=12$$

Diferença entre a média aritmética e a média geométrica:

$$\overline{X}-\overline{X}_G=20-12=8$$

**10.03.** e

Média harmônica dos números 4 e 6:

$$\overline{X}_H=\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$$

$$\overline{X}_H=\frac{2}{\frac{3+2}{12}}$$

$$\overline{X}_H=\frac{2}{1}\cdot\frac{12}{5}$$

$$\overline{X}_H=\frac{24}{5}=4{,}8$$

**10.04.** e

Pelo teorema da desigualdade das médias, tem-se c < b < a.

**10.05.** e

Adicionando os 5 tempos, tem-se:

2h40min + 1h50min + 2h10min + 3h05min + 1h20min = 9h125min = 10h65min

Dividindo a soma dos tempos por 5, tem-se 2h 13min.

Logo, o tempo médio gasto por esses alunos para resolver a prova foi de 2h13min.

**10.06.** a

**I) A média obtida pelo candidato I foi**

$$\frac{20\cdot 4+23\cdot 6}{4+6}=\frac{80+138}{10}=\frac{218}{10}=21{,}8$$

**II) A média obtida pelo candidato II foi**

$$\frac{21\cdot 4+18\cdot 6}{4+6}=\frac{84+108}{10}=\frac{192}{10}=19{,}2$$

**III) Para vencer a competição, a nota X que deverá ser obtida pelo candidato II é tal que:**

$$\frac{X\cdot 4+25\cdot 6}{4+6}>21{,}8\Leftrightarrow 4X+150>218\Leftrightarrow 4X>68\Leftrightarrow X>17$$

**Portanto, a menor nota deverá ser 18.**

**10.07.** c

Se a média das idades e a quantidade de atletas do time são conhecidas, podemos calcular a soma total das idades:

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{N}\Rightarrow 13=\frac{\sum x_1}{5}$$

Portanto, a soma das idades é 13 · 5 = 65 anos.

Sabemos que o mais velho tem 17 anos, o segundo mais velho tem x anos e especulamos que cada um dos demais atletas tem 11 anos.

Assim:

17 + x + 11 + 11 + 11 = 65, de modo que x = 15 anos.

**10.08.** a

O nível dos reservatórios **A** e **E**, após a abertura das válvulas, será igual a:

$$h=\frac{8+7+6+5+4}{5}=\frac{30}{5}=6\ \text{dm}$$

O nível do reservatório **F** se manterá em 3 dm.

**10.09.** b

A velocidade média de subida é igual à média harmônica das velocidades de cada trecho de subida, ou seja:

$$V=\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1+3}{6}}=\frac{2}{\frac{4}{6}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3$$

**10.10.** c

De acordo com a tabela, a média dos valores de consumo de água é dada por:

$$\overline{X}=\frac{0{,}24+0{,}28+0{,}55+0{,}36}{4}=0{,}3575$$

Por outro lado, a média de consumo *per capita* por dia da população da região Sudeste é dada por:

$$\overline{X}_p=\frac{0{,}24\cdot 25\%+0{,}28\cdot 4\%+0{,}55\cdot 20\%+0{,}36\cdot 51\%}{25\%+4\%+20\%+51\%}=0{,}3648$$

**10.11.** e

A média aritmética das idades das garotas é igual a:

$$\overline{X}=\frac{45}{3}=15\ \text{anos}$$

A média geométrica das idades dos rapazes é igual a:

$$\overline{X}_G=\sqrt{400}=20\ \text{anos}$$

A razão entre a média aritmética das idades das garotas e a média geométrica das idades dos rapazes é igual a:

$$\frac{\overline{X}}{\overline{X}_G}=\frac{15}{20}=0{,}75$$

**10.12.** d

A média aritmética ponderada das avaliações, ponderada pelos pesos apresentados, é dada por:

$$\overline{X}_p=\frac{6{,}00\cdot 4+7{,}00\cdot 4+8{,}00\cdot 2+9{,}00\cdot 2}{4+4+2+2}=\frac{86}{12}\cong 7{,}2$$

**10.13.** a

Observe que:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+ac+bc)$

Mas $x=\frac{a+b+c}{3}$ e $y=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, então:

$(3x)^2=3y+2\cdot(ab+ac+bc)$

$9x^2-3y=2\cdot(ab+ac+bc)$

Dividindo ambos os membros por 3, tem-se:

$$3x^2-y=2\cdot\left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)$$

$$\frac{ab+ac+bc}{3}=\frac{3x^2-y}{2}$$

**10.14.** a

Se a média inicial é igual a 7,0 e são 28 provas, a soma das notas dessas 28 provas iniciais é igual à média aritmética multiplicada pela quantidade de provas, ou seja:

$S_{28} = 28 \cdot 7{,}0 = 196$

Considerando as outras duas provas com notas 10,0 e 4,0, a nova média aritmética será:

$$\overline{X} = \frac{196 + 10 + 4}{28 + 1 + 1} = \frac{210}{30} = 7{,}0$$

Portanto, não houve alteração na média aritmética.

**Comentário:**

*Em geral, se a um conjunto com média aritmética igual a $\overline{X}$ incluem-se novos elementos cuja média também é igual a $\overline{X}$, não haverá alteração no valor da média aritmética.*

**10.15.** c

Se **x** e **y** são, respectivamente, os pesos da 1ª e 2ª provas, das informações do enunciado e pelo conceito de média aritmética ponderada, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{82x + 52y}{x + y} = 72{,}1 \\ \dfrac{90x + 40y}{x + y} = 73{,}5 \end{cases}$$

Como $x + y = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} 82x + 52y = 72{,}1 \\ 90x + 40y = 73{,}5 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 10, a 2ª equação por (–13) e adicionando ambos os membros, tem-se:

$(82 \cdot 10 - 90 \cdot 13) \cdot x + (52 \cdot 10 - 40 \cdot 13) \cdot y = 72{,}1 \cdot 10 - 73{,}5 \cdot 13$

$-350 \cdot x + 0 \cdot y = -234{,}5$

$$x = \frac{-234{,}5}{-350}$$

$x = 0{,}67$

Mas, $x + y = 1$, então, $0{,}67 + y = 1$, ou seja, $y = 0{,}33$.

**10.16.** 17 (01, 16)

- **Prova de que a média quadrática dos números positivos *a* e *b* é maior ou igual à média aritmética correspondente**:

$(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$

$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

$$\frac{2a^2 + 2b^2}{4} \geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$Q \geq A$ (I)

- **Prova de que a média aritmética dos números positivos *a* e *b* é maior ou igual à média geométrica correspondente**:

$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

$a - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} + b \geq 0$

$a + b \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

$A \geq G$ (II)

- **Prova de que a média geométrica dos números positivos *a* e *b* é maior ou igual à média harmônica correspondente**:

Sendo **c** e **d** números positivos, da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, podemos escrever:

$$\sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2}$$

Fazendo a troca $c = \frac{1}{a}$ e $d = \frac{1}{b}$, tem-se:

$$\sqrt{cd} = \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{c+d}{2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Portanto:

$$\sqrt{\frac{1}{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$G \geq H$ (III)

Relacionando (I), (II) e (III), tem-se $Q \geq A \geq G \geq H$.

Se $a = b$, tem-se $Q = A = G = H$.

Analisando as afirmações, tem-se:

01) Verdadeira: $G \geq A$

02) Falsa: $A \geq H$

04) Falsa: $Q \geq A$

08) Falsa: $Q \geq G$

16) Verdadeira: todas as médias coincidem, se $a = b$.

**10.17.** b

Taxa média de juros (juros simples): Média aritmética

$$i = \frac{100\% + 50\% + 12{,}5\%}{3} \cong 54{,}17\%$$

Taxa média de juros (juros compostos): Média geométrica

$i = \sqrt[3]{(1+1) \cdot (1+0{,}5) \cdot (1+0{,}125)} - 1$

$i = \sqrt[3]{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}125} - 1$

$i = \sqrt[3]{3375} - 1$

$$i = \sqrt[3]{\frac{3375}{1000}} - 1$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{15^3}{10^3}} - 1$$

$$i = \frac{15}{10} - 1$$

$i = 0{,}50 = 50\%$

Logo, em pontos percentuais, a diferença entre as taxas é aproximadamente igual a:

$\Delta i = 54{,}17 - 50 = 4{,}17$

**10.18.** e

Utilizando a desigualdade das médias, tem-se:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{1}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

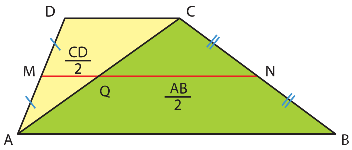
$$x + \frac{1}{x} \in [2; \infty[$$

**10.19.** Calculando-se as médias aritméticas dos saltos válidos dos três atletas, obtém-se aproximadamente:

- Atleta 1: 8,11 m
- Atleta 2: 8,32 m
- Atleta 3: 8,17 m

O atleta com maior média aritmética em seus saltos é o atleta 2.

**10.20.** a) Vamos traçar a diagonal de medida **AC** e observar alguns triângulos semelhantes:




Os triângulos **ACD** e **AMQ** são semelhantes. Logo:

$$\frac{AD}{AM} = \frac{CD}{MQ}$$

$$MQ \cdot AD = CD \cdot AM$$

Mas, $AD = 2 \cdot AM$, então:

$$MQ = \frac{CD \cdot AM}{2 \cdot AM}$$

$$MQ = \frac{CD}{2}$$

Analogamente, os triângulos **ABC** e **QNC** são semelhantes:

$$\frac{AB}{QN} = \frac{BC}{NC}$$

$$QN \cdot BC = NC \cdot AB$$

Mas, $BC = 2 \cdot NC$, então:

$$QN = \frac{NC \cdot AB}{2 \cdot NC}$$

$$QN = \frac{AB}{2}$$

Desta forma, tem-se:

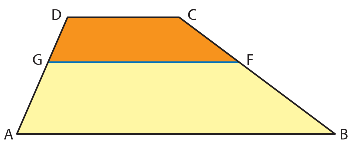
$$MN = MQ + QN$$

$$MN = \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}$$

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

O resultado indica que **MN** é a média aritmética de **AB** e **CD**.

b) Na próxima ilustração, os trapézios **ABFG** e **GFCD** são semelhantes:




Desta forma, pode-se escrever:

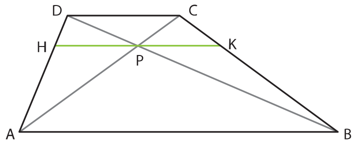
$$\frac{AB}{GF} = \frac{GF}{CD}$$

$$GF^2 = AB \cdot CD$$

$$GF = \sqrt{AB \cdot CD}$$

Portanto, **GF** é a média geométrica de **AB** e **CD**.

c) Para demonstrar que **HK** é a média harmônica de **AB** e **CD**, na próxima ilustração, vamos utilizar algumas semelhanças de triângulos:




- **DCA ≈ HPA**:

$$\frac{DC}{HP} = \frac{DA}{HA}$$

$$\frac{DC}{HP} = \frac{DH + HA}{HA} = \frac{DH}{HA} + 1$$

$$\frac{DH}{HA} = \frac{DC}{HP} - 1$$

$$\frac{DH}{HA} = \frac{DC - HP}{HP} \quad \text{(I)}$$

- **ABD ≈ HPD**:

$$\frac{AB}{HP} = \frac{DA}{DH}$$

$$\frac{AB}{HP} = \frac{DH + HA}{DH} = 1 + \frac{HA}{DH}$$

$$\frac{AH}{DH} = \frac{AB}{HP} - 1$$

$$\frac{AH}{DH} = \frac{AB - HP}{HP}$$

$$\frac{DH}{AH} = \frac{HP}{AB - HP} \quad \text{(II)}$$

- De (I) e (II), tem-se:

$$\frac{DC - HP}{HP} = \frac{HP}{AB - HP}$$

$$HP \cdot HP = (DC - HP) \cdot (AB - HP)$$

$$HP^2 = AB \cdot DC - AB \cdot HP - DC \cdot HP + HP^2$$

$$(AB + DC) \cdot HP = AB \cdot DC$$

Dividindo membro a membro por $AB \cdot DC$, tem-se:

$$\left(\frac{AB}{AB \cdot DC} + \frac{DC}{AB \cdot DC}\right) \cdot HP = \frac{AB \cdot DC}{AB \cdot DC}$$

$$\left(\frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}\right) \cdot HP = 1$$

$$HP = \frac{1}{\frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}} \quad \text{(III)}$$

- Analogamente, se o triângulo **DCB** é semelhante ao triângulo **PKB**, assim como o triângulo **ABC** é semelhante ao triângulo **PKC**, pode-se concluir que **HP = PK**, ou seja:

$$PK = \frac{1}{\frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}} \quad \text{(IV)}$$

- Das relações (III) e (IV), pode-se escrever:

$$HK = HP + PK$$

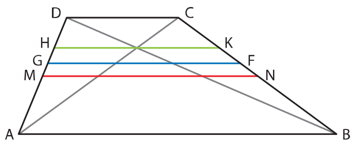
$$HK = \frac{1}{\frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}} + \frac{1}{\frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}}$$

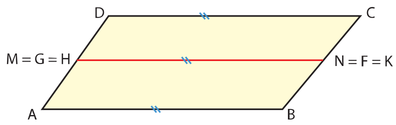
$$HK = \frac{2}{\frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}}$$

O resultado indica que **HK** é a média harmônica de **AB** e **CD**.

**Comentário**:

Pode-se ainda mostrar que **MN ≥ GF ≥ HK**:




A igualdade **MN = GF = HK** é válida apenas se o trapézio apresentar **AB = CD**, ou seja, se o quadrilátero **ABCD** for um paralelogramo:

## Aula 11

**11.01.** b

A nota mais frequente tem valor 8,0. Logo, 8,0 é o valor da moda.

**11.02.** b

O conjunto é constituído por 6 valores (número par). Logo, a mediana corresponde ao valor da média aritmética dos dois valores centrais (3.º e 4.º valores) do conjunto ordenado. Assim, tem-se:

$$Me = \frac{1,56 + 1,92}{2} = 1,74$$

**11.03.** d

O conjunto ordenado em ordem crescente é dado por:

(85, 86, 87, 88, 89, 89, 90, 90, 90, 92)

A média aritmética é dada por:

$$\overline{X} = \frac{85+86+87+88+89+89+90+90+90+92}{10}$$

$$\overline{X} = \frac{886}{10} = 88,6$$

A mediana do conjunto é igual à média aritmética dos dois valores centrais (5.º e 6.º valores):

$$Me = \frac{89+89}{2} = 89$$

**11.04.** d

Ordenando em ordem crescente as alturas dos 6 jogadores, temos: (1,73; 1,78; 1,81; 1,82; 1,83; 1,85)

A altura mediana é igual à média aritmética dos dois valores centrais (3.º e 4.º valores), ou seja, em metros, temos

$$Me = \frac{1,81 + 1,82}{2} = 1,8150\,.$$

Em metros, a altura média é dada por:

$$\overline{X} = \frac{1,73+1,78+1,81+1,82+1,83+1,85}{6}$$

$$\overline{X} = \frac{10,82}{6} \cong 1,8033$$

Assim, a diferença entre a altura mediana e a média das alturas desses seis jogadores, em cm, é aproximadamente igual a:

$$Me - \overline{X} \cong 181,50 - 180,33 = 1,17$$

**11.05.** e

A média aritmética do número de filmes assistidos pelos 40 alunos é dada por:

$$\overline{X} = \frac{0\cdot1+1\cdot3+2\cdot6+3\cdot8+4\cdot10+5\cdot7+6\cdot5}{40}$$

$$\overline{X} = \frac{144}{40} = 3,6$$

**11.06.** a

Seja MA a média aritmética e MD a mediana.

$$MA = \frac{17+8+30+21+7+x}{6} = \frac{83+x}{6}$$

Organizando os elementos em ordem crescente, e sabendo que $8 < x < 21$, o elemento **x** deve ocupar a 3.ª ou 4.ª posição: {7, 8, x, 17, 21, 30}.

Então:

$$MD = \frac{x+17}{2}$$

Do enunciado, temos MA = MD + 1

Portanto:

$$\frac{x+17}{2} + 1 = \frac{83+x}{6} \Rightarrow x = 13$$

$$\text{Logo, } MA = \frac{96}{6} = 16$$

**11.07.** d

A moda da distribuição é igual a 5, pois este número é o que ocorre com maior frequência (50 vezes).

A mediana da distribuição é a média aritmética dos dois valores centrais (100.º e 101.º valores), ou seja, 3 processos diários.

A quantidade média de processos diários é igual a:

$$\overline{X} = \frac{0\cdot10+1\cdot30+2\cdot40+3\cdot30+4\cdot40+5\cdot50}{200}$$

$$\overline{X} = \frac{610}{200} = 3,05$$

A repartição pública não recebeu processos administrativos em exatamente 5% dos dias úteis, pois $\frac{10}{200} = 0,05 = 5\%$.

**11.08.** b

Sabe-se que a média aritmética de 12 números é 5, logo:

$$\frac{S_{12}}{12} = 5 \Rightarrow S_{12} = 60$$

Se tirando os números **x** e **y** desse conjunto, a média aritmética dos números restantes passa a ser 4,5, então:

$$\frac{S_{12} - x - y}{12 - 2} = 4,5$$

$$\frac{60 - x - y}{10} = 4,5$$

$$60 - x - y = 45$$

$$x + y = 15$$

Além disso, sabe-se que $x - y = 3$. Resolvendo o sistema formado pelas duas últimas equações, temos $x = 9$ e $y = 6$. Portanto, $x \cdot y = 9 \cdot 6 = 54$.

**11.09.** e

a) Falsa

Não há informação suficiente para a determinação da nota média.

b) Falsa

Não há informação suficiente para a determinação da nota média e da nota mediana.

c) Falsa

Não há informação suficiente para a determinação da nota modal.

d) Falsa

Não há informação suficiente para a determinação da nota média.

e) Verdadeira

A nota mediana é igual à média aritmética entre os dois valores centrais (50º e 51º valores). Qualquer que seja o número resultante e correspondente à mediana, é certo que 50 valores serão menores que a mediana e 50% serão maiores, de modo que é correto afirmar que 50% dos alunos tiveram nota acima da mediana.

**11.10.** b

Se a média das alturas de 51 alunos de uma turma é igual a 122 cm, então a soma das medidas das alturas destes 51 alunos é igual a $51 \cdot 122 = 6222$ cm.

Se a mediana das alturas é igual a 117 cm, então a 26ª altura, dentre as 51 alturas colocadas em ordem crescente, é igual a 117 cm. Logo, a soma das 26 menores alturas é, no máximo, igual a $26 \cdot 117 = 3042$ cm.

Desta forma, a média das alturas dos 25 maiores alunos da turma é, no mínimo, igual:

$$\frac{6222-3042}{25} = \frac{3180}{25} = 127{,}2\,\text{cm}$$

**11.11.** a

**1ª afirmação: verdadeira**

A média das idades é igual a:

$$\overline{X} = \frac{16\cdot60+17\cdot50+18\cdot40+19\cdot30+20\cdot50+21\cdot20}{60+50+40+30+50+20}$$

$$\overline{X} = \frac{960+850+720+570+1000+420}{250}$$

$$\overline{X} = \frac{4520}{250} = 18{,}08$$

Dos 250 alunos da escola, exatamente $60 + 50 + 40 = 150$ possuem idade abaixo da média (18,08). Assim, o percentual de alunos que possuem idade abaixo da média é igual a:

$$\frac{150}{250} = 0{,}60 = 60\%$$

Logo, exatamente 60% dos alunos possuem idade *abaixo da média dessa distribuição.*

**2ª afirmação: verdadeira**

$$\frac{40+30+50+20}{250} = 0{,}56 = 56\%$$

Portanto, o *percentual de alunos dessa escola cuja idade é maior ou igual a 18 anos é 56.*

**3ª afirmação: verdadeira**

$$\overline{X} = \frac{16\cdot60+17\cdot50+18\cdot40}{60+50+40} = \frac{2530}{150} \cong 16{,}87 \cong 17\text{ anos}$$

Desta forma, a média de idade aproximada (em anos) dos alunos cuja idade é menor ou igual a 18 anos é 17.

**11.12.** d

Dispondo os valores salariais em ordem crescente, em reais, temos: (80; 80; 85; 90; 95; 100; 100; 100)

O salário médio, em reais, é igual a:

$$\overline{X} = \frac{80+80+85+90+95+100+100+100}{8}$$

$$\overline{X} = \frac{730}{8} = 91{,}25$$

O salário mediano é igual à média aritmética dos dois valores centrais da sequência ordenada (4º e 5º valores). Logo, a mediana, em reais, é igual a:

$$Me = \frac{90+95}{2} = 92{,}50$$

A moda salarial é o valor mais frequente entre os salários, ou seja, Mo = 100,00.

**11.13.** e

Como **n** é natural e diferente dos elementos que compõem o conjunto, existem 3 possibilidades quanto ao valor de **n**.

- 1ª possibilidade: $0 \le n < 5 \Rightarrow \overline{X} = Me = 6$

$$\frac{n+5+6+10+11}{5} = 6$$

$n+32 = 30$

$n = -2$ (não convém, pois $n \in \mathbb{N}$)

- 2ª possibilidade: $6 < n < 10 \Rightarrow \overline{X} = Me = n$

$$\frac{n+5+6+10+11}{5} = n$$

$n+32 = 5n$

$n = 8$

- 3ª possibilidade: $n > 11 \Rightarrow \overline{X} = Me = 10$

$$\frac{n+5+6+10+11}{5} = 10$$

$n+32 = 50$

$n = 18$

Portanto, a soma dos valores de **n** é igual a $8 + 18 = 26$.

**11.14.** e

O custo médio por frasco de medicamento a ser usado no referido procedimento, em reais, é igual a:

$$\overline{X} = \frac{9{,}00\cdot20+3{,}00\cdot30+2{,}70\cdot10+1{,}00\cdot18+5{,}70\cdot30}{20+30+10+18+30}$$

$$\overline{X} = \frac{180{,}00+90{,}00+27{,}00+18{,}00+171{,}00}{108}$$

$$\overline{X} = \frac{486{,}00}{108}$$

$\overline{X} = 4{,}50$

**11.15.** a

- Média aritmética:

$$\overline{X} = \frac{700{,}00\cdot8+900{,}00\cdot5+1400{,}00\cdot1+2000{,}00\cdot7+2400{,}00\cdot5+3000{,}00\cdot1}{8+5+1+7+5+1}$$

$$\overline{X} = \frac{40500{,}00}{27} = 1500{,}00$$

- Mediana:

Em 27 valores, a mediana é igual ao termo central (14º valor). Logo, a mediana é igual a 1400,00 reais.

- Soma da média com a mediana:

A soma da média aritmética com a mediana é igual a $1500{,}00 + 1400{,}00 = 2900{,}00$.

**11.16.** a

| Empresas | 1º dia | 2º dia | 3º dia | 4º dia | 5º dia | Média | Mediana | Moda |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TOM | 7 | 8 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| OLÁ | 8 | 10 | 9 | 8 | 5 | 8 | 8 | 8 |
| SIM | 6 | 6 | 8 | 6 | 9 | 7 | 6 | 6 |
| EXPERT | 4 | 6 | 4 | 7 | 4 | 5 | 4 | 4 |
| Média diária | 6,25 | 7,50 | 7,00 | 6,75 | 6,25 | 6,75 | | |

I. Verdadeira

A empresa com a maior média dos números de ligações não completadas foi a OLÁ, com 8 ligações não completadas.

II. Verdadeira

A empresa com a menor moda dos números de ligações não completadas foi a EXPERT. A moda da EXPERT foi igual a 4.

III. Verdadeira

Com 7,50 ligações não completadas, o 2º dia foi o que apresentou a maior média dos números de ligações não completadas.

IV. Falsa

A mediana dos números de ligações não completadas pelos usuários da empresa TOM (7) não é menor do que a mediana dos números de ligações não completadas pelos usuários da empresa SIM (6).

**11.17.** c

A moda do conjunto é igual a 8, independente do valor de **m**, pois 8 é o valor mais frequente. Excetuando-se o valor de **m**, o conjunto ordenado com seis elementos seria:

(8, 8, 8, 10, 13, 16)

Se m > 12, necessariamente o termo central (4º termo) é igual a 10, ou seja, a mediana é igual a 10.

Se a moda (8), a mediana (10) e a média são termos consecutivos de uma progressão aritmética, então a razão da progressão é igual a 2 e a média aritmética é igual a 12.

Portanto:

$$\overline{X}=\frac{8+8+8+10+13+16+m}{7}$$

$$12=\frac{63+m}{7}$$

$$84=63+m$$

$$m=21$$

**11.18.** d

I) A mediana das idades das mães das crianças nascidas em 2009 pertence ao intervalo 25 |—— 30 pois, em porcentagem, $0{,}8 + 18{,}2 + 28{,}3 < 50$ e $0{,}8 + 18{,}2 + 28{,}3 + 25{,}2 > 50$

Assim, a mediana não é obrigatoriamente maior que 27 e não pode ser menor que 23, o que torna as alternativas (a) e (b) falsas.

II) A mediana das idades das mães das crianças nascidas em 1999 pertence ao intervalo 20 |—— 25 pois, em porcentagem, $0{,}7 + 20{,}8 < 50$ e $0{,}7 + 20{,}8 + 30{,}8 > 50$

Assim, a mediana não é maior que 25 e a alternativa (c) é falsa.

III) Desprezando a classe das idades das mães cujas idades são inferiores a 15 anos, superiores a 40 anos ou não foram declaradas, é possível construir a tabela seguinte.

| Faixa etária | Ponto médio | Porcentagens | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1999 | 2004 | 2009 |
| 15 |—— 20 | 17,5 | 20,8 | 19,9 | 18,2 |
| 20 |—— 25 | 22,5 | 30,8 | 30,7 | 28,3 |
| 25 |—— 30 | 27,5 | 23,3 | 23,7 | 25,2 |
| 30 |—— 35 | 32,5 | 14,4 | 14,8 | 16,8 |
| 35 |—— 40 | 37,5 | 6,7 | 7,3 | 8,0 |
| Total | | 96 | 96,4 | 96,5 |

De 15 a quase 40 anos, em 2004, a média das idades das mães é: $\frac{2445{,}5}{96{,}4} \cong 25{,}37$. Considerando-se que a quantidade de mães com mais de 40 anos é maior que a quantidade de mães com menos de 15 anos, a média das idades das mães que têm idades declaradas é, na realidade, maior que 25,37 e, portanto maior que 22 anos.

IV) Analogamente, pode-se concluir que a média das idades das mães das crianças nascidas em 1999 foi superior a 25 anos e, portanto, a alternativa (e) é falsa.

**11.19.** R$ 20,00

O valor médio pago pelo cliente, em reais, pelo rodízio na semana, é igual à média aritmética dos preços unitários do rodízio, ponderados pela quantidade de dias considerados em cada um deles:

$$\overline{X}=\frac{18{,}50\cdot 4+22{,}00\cdot 3}{4+3}$$

$$\overline{X}=\frac{74{,}00+66{,}00}{7}$$

$$\overline{X}=\frac{140{,}00}{7}$$

$$\overline{X}=20{,}00$$

Logo, o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana, foi igual a R$ 20,00.

**11.20.** a) 12.664,37 (aproximadamente).

No período considerado temos, de acordo com os dados das tabelas, que

- a média dos casos de dengue, por unidade federativa da região Centro-Oeste, é igual a 20.244, pois
$$\frac{80.976}{4}=20.244;$$
- a média dos casos de dengue, por unidade federativa do Brasil, é aproximadamente igual a 7.579,63, pois
$$\frac{204.650}{27}=7.579{,}63.$$

Portanto a diferença entre as médias é aproximadamente igual a:

20.244 – 7.579,63 = **12.664,37**

b) Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Goiás.

De acordo com as informações fornecidas, é considerado epidemia quando a incidência é maior do que 300 casos a cada 100 mil habitantes, o que corresponde a 0,3% da população. Calculando-se a porcentagem da população que foi acometida pela dengue em cada unidade federativa do Centro-Oeste, obtém-se:

Mato Grosso do Sul: $p_1=\frac{42.015}{2.587.269}\approx 1{,}62\%$

Mato Grosso: $p_2=\frac{10.765}{3.182.113}\approx 0{,}34\%$

Goiás: $p_3=\frac{27.376}{6.434.048}\approx 0{,}42\%$

Distrito Federal: $p_4=\frac{820}{2.789.761}\approx 0{,}03\%$

Assim, as unidades federativas em que ocorreu estado de epidemia foram Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Goiás.

# Aula 12

**12.01.** e

Verifique que média aritmética dos elementos de cada um dos conjuntos é igual a 5. Portanto, dentre as alternativas apresentadas, enquanto não há dispersão no conjunto {5; 5; 5; 5}, onde todos os valores são iguais à média, {0; 10; 0; 10} é o conjunto de maior dispersão.

**12.02.** b

Quanto menor for o desvio padrão dos pontos obtidos por um candidato, mais regular será a pontuação desse candidato. Portanto, de acordo com os dados da tabela, Marco foi mais bem classificado que Paulo, nesse concurso, pois, dos dois, foi Marco quem obteve menor desvio padrão.

**12.03.** d

01) Correto.

O desvio padrão das médias dos alunos da turma **B** é o maior das três turmas. Logo, as notas dos alunos dessa turma se apresentaram mais heterogêneas.

02) Correto.

O desvio padrão é diferente para cada uma das turmas. Logo, as médias das três turmas, mesmo sendo iguais, tiveram variações diferentes.

03) Incorreto.

As notas da turma **A** se apresentaram **menos** dispersas em torno da média, pois essa turma obteve o **menor** desvio padrão.

**12.04.** d

a) Incorreto.

Quanto mais próximo de zero é o desvio padrão, mais homogênea é a distribuição dos valores da variável.

b) Incorreto.

Se todos os valores da variável são iguais, ou seja, se não há variação, então não há desvio e a variância (média aritmética dos quadrados dos desvios) é igual a zero. Logo, o desvio padrão (raiz quadrada da variância) também é igual a zero.

c) Incorreto.

O desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância. Logo, quanto maior for a variância, maior será o desvio padrão.

d) Correto.

Quanto mais próximo de zero é o desvio padrão, mais homogênea é a distribuição dos valores da variável.

**12.05.** b

A amplitude é igual à diferença entre o maior e o menor valor da distribuição de valores. Portanto, de acordo com a tabela:

$$\text{Amplitude} = 5 - 0 \Rightarrow \text{Amplitude} = 5$$

**12.06.** d

**Cálculo da média aritmética**:

$$M_a = \frac{16 + 22 + 25 + 26}{4}$$

$$M_a = \frac{89}{4} = 22{,}25$$

**Cálculo da variância**:

$$V = \frac{(16 - 22{,}25)^2 + (22 - 22{,}25)^2 + (25 - 22{,}25)^2 + (26 - 22{,}25)^2}{4}$$

$$V = \frac{(-6{,}25)^2 + (-0{,}25)^2 + 2{,}75^2 + 3{,}75^2}{4}$$

$$V = \frac{60{,}75}{4}$$

$$V = 15{,}1875 \Rightarrow V \cong 15{,}19$$

**12.07.** a

I. Verdadeira

$$\overline{X} = \frac{3 + 4 + 6 + 9 + 5 + 7 + 8}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

II. Verdadeira

$$V = \frac{(3-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (9-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{7}$$

$$V = \frac{9 + 4 + 0 + 9 + 1 + 1 + 4}{7} = 4$$

III. Falsa

$$Dp = \sqrt{V} = \sqrt{4} = 2$$

**12.08.** c

**Cálculo da média**:

$$\overline{X} = \frac{32 + 34 + 27 + 29 + 28}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

**Cálculo da Mediana**:

Os cinco valores colocados em ordem crescente formam a sequência (27, 28, 29, 32, 34). O termo central é igual à mediana, ou seja, Me = 29.

**Cálculo da Variância**:

$$V=\frac{(32-30)^2+(34-30)^2+(27-30)^2+(29-30)^2+(28-30)^2}{5}$$

$$V=\frac{34}{5}=6{,}8$$

**12.09.** e

**Cálculo da média**:

$$\overline{X}=\frac{33+36+37+34}{4}=\frac{140}{4}=35\ \text{mm}$$

**Cálculo do desvio padrão**:

$$Dp=\sqrt{\frac{(33-35)^2+(36-35)^2+(37-35)^2+(34-35)^2}{4}}$$

$$Dp=\sqrt{\frac{4+1+4+1}{4}}$$

$$Dp=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\cong\frac{3{,}16}{2}=1{,}58$$

**12.10.** a

1. Verdadeira.

   A média de batimentos cardíacos por minuto é dada por:

   $$\overline{X}=\frac{125+130+150+125+165+150+135}{7}=\frac{980}{7}=140$$

2. Falsa.

   Nenhuma frequência cardíaca está abaixo de 125.

3. Verdadeira.

   O desvio padrão dos batimentos cardíacos por minuto é dado por:

   $$Dp=\sqrt{\frac{(125-140)^2+(130-140)^2+(150-140)^2+(125-140)^2+(165-140)^2+(150-140)^2+(135-140)^2}{7}}$$

   $$Dp=\sqrt{\frac{225+100+100+125+625+100+25}{7}}$$

   $$Dp=\sqrt{\frac{1400}{7}}$$

   $$Dp=\sqrt{200}$$

   $$Dp=\sqrt{2\cdot 10^2}$$

   $$Dp=10\sqrt{2}$$

   $$Dp\cong 10\cdot 1{,}41$$

   $$Dp\cong 14{,}1$$

**12.11.** a

O desvio padrão do conjunto {5822, 6634, 6586, 5892, 5811, 6093, 6331} é dado por:

$$R=\sqrt{\frac{(5822-6167)^2+(6634-6167)^2+(6586-6167)^2+(5892-6167)^2+(5811-6167)^2+(6093-6167)^2+(6331-6167)^2}{7}}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, temos:

$$R^2=\left(\sqrt{\frac{345^2+467^2+419^2+275^2+356^2+74^2+164^2}{7}}\right)^2$$

$$R^2=\frac{345^2+467^2+419^2+275^2+356^2+74^2+164^2}{7}$$

$$7R^2=345^2+467^2+419^2+275^2+356^2+74^2+164^2$$

**12.12.** V – F – V

**1ª afirmação**: **Verdadeira**.

Os valores em progressão aritmética seriam (6093, 6331, 6569, 6807). A razão seria igual a 6331 – 6093 = 238.

**2ª afirmação**: **Falsa**.

$$\frac{6331-5811}{5811}\cong 0{,}089=8{,}9\%$$

**3ª afirmação**: **Verdadeira**.

A média informada no texto é igual a 6167. Ordenando os sete valores, temos:

(5811, 5822, 5892, 6093, 6331, 6586, 6634)

O termo central (4º termo) é igual à mediana, ou seja, Me = 6093.

Logo, a medidana é inferior à média aritmética.

**12.13.** V – F – V

**1ª afirmação**: **Verdadeira**.

A razão da P.A. seria igual a 46 – 58 = –12. Desta forma, a sequência dos lançamentos, de 1998 até 2202, seria (94, 82, 70, 58, 46), cuja soma é igual a 350.

**2ª afirmação**: **Falsa**.

A média é dada por:

$$\bar{X} = \frac{58 + 46 + 63 + 48 + 53 + 62 + 63 + 63 + 73 + 71}{10} = \frac{600}{10} = 60$$

A moda é o valor mais frequente, ou seja, 63. Portanto, a moda não é inferior à média aritmética.

**3ª afirmação**: **Verdadeira**.

Ordenando-se os 10 valores, temos (46, 48, 53, 58, 62, 63, 63, 63, 71, 73). A mediana é igual à média aritmética entre os valores centrais (5º e 6º valores):

$$Me = \frac{62 + 63}{2} = 62,5$$

Logo, a mediana é inferior a 63.

**12.14.** b

O desvio padrão — $\sigma$ — é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(58-60)^2 + (46-60)^2 + (63-60)^2 \cdot 3 + (48-60)^2 + (53-60)^2 + (62-60)^2 + (73-60)^2 + (71-60)^2}{10}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4 + 196 + 27 + 144 + 49 + 4 + 169 + 121}{10}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{714}{10}}$$

$$\sigma = \sqrt{71,4}$$

Observe que $8,3^2 = 68,89 < 71,4 < 73,96 = 8,6^2$, logo:

$$\sqrt{8,3^2} < \sqrt{71,4} < \sqrt{8,6^2}$$

$$8,3 < \sigma < 8,6$$

**12.15.** e

**a) Falsa**.

O conjunto ordenado de 2000 a 2006 é dado por:

(3,14; 5,69; 5,97; 7,60; 7,67; 9,30; 12,53).

A mediana é o 4º termo (valor central), ou seja, Me = 7,60%.

**b) Falsa**.

O conjunto ordenado dos 14 índices de inflação de 2000 a 2013 é dado por:

(3,14; 4,31; 4,46; 5,69; 5,84; 5,90; 5,91; 5,91; 5,97; 6,50; 7,60; 7,67; 9,30; 12,53)

Exatamente 5 dos 14 índices são maiores 6,48%. Logo, em menos da metade dos anos, a inflação foi superior a 6,48%.

**c) Falsa**.

A média aritmética entre as inflações máxima e mínima é dada por:

$$\frac{3,14 + 12,53}{2} = \frac{15,67}{2} = 7,835\ \%$$

**d) Falsa**.

- Média aritmética dos índices de inflação de 2000 a 2006:

$$\bar{X} = \frac{5,97 + 7,67 + 12,53 + 9,30 + 7,60 + 5,69 + 3,14}{7}$$

$$\bar{X} = \frac{51,90}{7} \cong 7,41\%$$

O desvio médio desses índices é, aproximadamente, igual a:

$$D_m \cong \frac{|5,97 - 7,41| + |7,67 - 7,41| + |12,53 - 7,41| + |9,30 - 7,41| + |7,60 - 7,41| + |5,69 - 7,41| + |3,14 - 7,41|}{7}$$

$$D_m \cong \frac{|-1,44| + |0,26| + |5,12| + |1,89| + |0,19| + |-1,72| + |-4,27|}{7}$$

$$D_m \cong \frac{1,44 + 0,26 + 5,12 + 1,89 + 0,19 + 1,72 + 4,27}{7}$$

$$D_m \cong \frac{14,89}{7} \cong 2,13\%$$

- Média aritmética dos índices de inflação de 2006 a 2013:

$$\overline{X}=\frac{3,14+4,46+5,90+4,31+5,91+6,50+5,84+5,91}{8}$$

$$\overline{X}=\frac{41,97}{8}\cong 5,25\%$$

O desvio médio desses índices é, aproximadamente, igual a:

$$D_m\cong\frac{|3,14-5,25|+|4,46-5,25|+|5,90-5,25|+|4,31-5,25|+|5,91-5,25|+|6,50-5,25|+|5,84-5,25|+|5,91-5,25|}{8}$$

$$D_m\cong\frac{|-2,11|+|-0,79|+|0,65|+|-0,94|+|0,66|+|1,25|+|0,59|+|0,66|}{8}$$

$$D_m\cong\frac{2,11+0,79+0,65+0,94+0,66+1,25+0,59+0,66}{8}$$

$$D_m\cong\frac{7,65}{8}\cong 0,96\%$$

Portanto, o desvio médio dos índices de inflação de 2000 a 2006 **não é** quase igual ao desvio médio dos índices de inflação de 2006 a 2013, pois 5,25% é relativamente maior do que 0,96%.

**e) Verdadeira**

- Média aritmética dos índices de inflação de 2010 a 2013:

$$\overline{X}=\frac{5,91+6,50+5,84+5,91}{4}$$

$$\overline{X}=\frac{24,16}{4}=6,04\%$$

- Média aritmética dos índices de inflação de 2000 a 2009:

$$\overline{X}=\frac{5,97+7,67+12,53+9,30+7,60+5,69+3,14+4,46+5,90+4,31}{10}$$

$$\overline{X}=\frac{66,57}{10}=6,657\%$$

Portanto, a média aritmética dos índices de inflação de 2010 a 2013 é menor do que a de 2000 a 2009, pois 6,04% < 6,657%.

**12.16.** F – F – V – V – F

**00) Falsa**.

A moda da série é 54.

**01) Falsa**.

Em 9 valores, a mediana é igual ao 5º valor (central), quando a série é colocada em ordem crescente ou decrescente. Logo, a mediana é igual a um valor da série.

**02) Verdadeira**.

A média aritmética da série é dada por:

$$\overline{X}=\frac{37+54+65+48+84+56+54+82+69}{9}=\frac{549}{9}=61$$

Os quatro registros da série que são maiores que 61 são 65, 84, 82 e 69.

**03) Verdadeira**.

A média aritmética da série é igual a 61.

A amplitude total da série é igual à diferença entre o maior e o menor número:

84 – 37 = 47

Portanto, a amplitude total da série numérica é menor que a correspondente média.

**04) Falsa**.

Os gráficos de setores são utilizados para representar variáveis nominais, não variáveis numéricas como é o caso da série. Além disso, caso se, realmente, representasse os valores da série em um gráfico de setores, exatamente oito setores teriam as mesmas medidas de ângulos centrais, uma vez que esses oito valores da série ocorrem com a mesma frequência (cada um deles ocorre uma única vez). Já o setor correspondente à moda, que ocorre duas vezes, teria ângulo central com medida igual ao dobro das medidas dos demais.

**12.17.** c

O salário esperado é a média aritmética dos salários, ou seja:

$$\mu=\frac{300\cdot 0,3+400\cdot 0,4+500\cdot 0,2+600\cdot 0,1}{0,3+0,4+0,2+0,1}=410$$

O desvio padrão é dado por:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(300-410)^2\cdot 0,3+(400-410)^2\cdot 0,4+(500-410)^2\cdot 0,2+(600-410)^2\cdot 0,1}{0,3+0,4+0,2+0,1}}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{3630+40+1620+3610}{1}}$$

$$\sigma=\sqrt{8900}$$

$\sigma \cong 94{,}34$

Logo, $90 < \sigma < 100$.

**12.18.** a

A média aritmética da distribuição inicial de massas é dada por:

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{2 + 3 + 1} = \frac{24}{6} = 4 \text{ kg}$$

O desvio padrão da distribuição inicial de massas é dado por:

$$Dp = \sqrt{\frac{(3-4)^2 \cdot 2 + (4-4)^2 \cdot 3 + (6-4)^2 \cdot 1}{2+3+1}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = \sqrt{1} = 1 \text{kg}$$

Como a média da distribuição inicial é igual a 4 kg, acrescentando-se qualquer quantidade de objetos de massa 4 kg, a média não sofrerá alteração, permanecendo com o mesmo valor igual a 4 kg. O acréscimo de **n** objetos, cada um de massa igual a 4 kg, faz com que o desvio padrão se reduza à metade, ou seja, o desvio padrão da nova distribuição será igual a $\frac{1}{2}$. Desta forma, considerando-se o acréscimo dos **n** objetos de massa 4 kg, tem-se:

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{(3-4)^2 \cdot 2 + (4-4)^2 \cdot (3+n) + (6-4)^2 \cdot 1}{2 + (3+n) + 1}}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{6}{n+6}}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{6}{n+6}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{6}{n+6}$$

$n + 6 = 24$

$n = 18$

**12.19.** a) A média dos salários dos trabalhadores, em reais é dada por:

$$Ma = \frac{500 \cdot 10 + 1000 \cdot 5 + 1500 \cdot 1 + 2000 \cdot 10 + 5000 \cdot 4 + 10500 \cdot 1}{31} = 2000$$

Como são 31 funcionários (quantidade ímpar), a mediana é igual ao termo central (16.º salário em ordem crescente). Logo, a mediana é igual a 1 500 reais.

b) Considerando-se 31 funcionários, a média aritmética é igual a 2 000 reais. Se cada um dos dois novos funcionários ganha 2 000 reais, conclui-se que a média aritmética dos 33 funcionários continuará a ser 2 000 reais.

$$Ma = \frac{500 \cdot 10 + 1000 \cdot 5 + 1500 \cdot 1 + 2000 \cdot 12 + 5000 \cdot 4 + 10500 \cdot 1}{33} = 2000$$

Assim, com 33 funcionários, a soma dos quadrados dos desvios em relação à medida aritmética é a mesma que a soma dos quadrados dos desvios considerando-se 31 funcionários. Por outro lado, o denominador do quociente no caso com 33 funcionários é maior do que com 31:

$$V_{31} = \frac{(500-2000)^2 \cdot 10 + (1000-2000)^2 \cdot 5 + (1500-2000)^2 \cdot 1 + (2000-2000)^2 \cdot \mathbf{10} + (5000-2000)^2 \cdot 4 + (10500-2000)^2 \cdot 1}{\mathbf{31}}$$

$$V_{33} = \frac{(500-2000)^2 \cdot 10 + (1000-2000)^2 \cdot 5 + (1500-2000)^2 \cdot 1 + (2000-2000)^2 \cdot \mathbf{12} + (5000-2000)^2 \cdot 4 + (10500-2000)^2 \cdot 1}{\mathbf{33}}$$

Portanto, a variância, considerando-se 33 funcionários, ficará menor. Ou seja, $V_{33} < V_{31}$.

**12.20.** a) Organizando em uma tabela de frequências, temos:

| Idade | Frequência |
|---|---|
| 16 | 6 |
| 20 | 2 |
| 23 | 4 |
| Total | 12 |

b) A moda é o valor mais frequente da distribuição, ou seja, Mo = 16 anos.

Como a quantidade de valores é 12, ou seja, representada por um número par, a mediana é igual à média aritmética das idades dos valores que ocupam a 6.ª e 7.ª posições, pois tais posições são as posições centrais. O 6.º valor é igual a 16 anos e o 7.º valor é igual a 20 anos. Logo, a mediana é igual a:

$$Me = \frac{16 + 20}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ anos}$$

A média aritmética pode ser calculada ponderando-se cada idade pela frequência correspondente:

$$\bar{X} = \frac{16 \cdot 6 + 20 \cdot 2 + 23 \cdot 4}{6 + 2 + 4} = \frac{228}{12} = 19 \text{ anos}$$

c) A variância da distribuição de frequências de idades é dada por:

$$V = \frac{(16-19)^2 \cdot 6 + (20-19)^2 \cdot 2 + (23-19)^2 \cdot 4}{6 + 2 + 4}$$

$$V = \frac{120}{12} = 10 \text{ anos}^2$$

O desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância, ou seja:

$$Dp = \sqrt{10} \cong 3{,}2 \text{ anos}$$

# Aula 10

**10.01.** c

Determinante da matriz de Vandermonde:

$\det(V)=(2a-a)\cdot(3a-a)\cdot(3a-2a)$

$\det(V)=a\cdot 2a\cdot a$

$\det(V)=2a^3$

**10.02.** d

O primeiro membro da desigualdade é o determinante de uma matriz de Vandermonde.

$(x-1)\cdot(3-1)\cdot(3-x)\geq 0$

$2\cdot(3x-x^2-3+x)\geq 0$

$-x^2+4x-3\geq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq 3$

A soma das soluções inteiras da inequação é:

$1+2+3=6$

**10.03.** c

Usando a regra de Chió, temos:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & \boxed{1} & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 6-2\cdot 2 & 0-(-1)\cdot 2 & 7-3\cdot 2 \\ 2-2\cdot(-1) & 2-(-1)\cdot(-1) & 0-3\cdot(-1) \\ 8-2\cdot 3 & -2-(-1)\cdot 3 & 11-3\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(4+12+4-2-16-6)=4$$

Portanto, o valor do determinante é um número inteiro divisor de 8.

**10.04.** a

Multiplicamos a quarta linha por $-1$ e somamos com a terceira.

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & 13 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 10 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & 13 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 9 & 0 & 15 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Usando o teorema de Laplace, temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & 13 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 9 & 0 & 15 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 & 13 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 15 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 & 13 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 15 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha por $-2$ e somamos com a primeira e com a terceira.

$$-2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 & 13 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 15 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\cdot(-14+2+5+4)=6$$

**10.05.** b

Usando a regra de Chió, temos:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2-1\cdot 1 & 2-1\cdot 1 & 2-1\cdot 1 \\ 2-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 \\ 2-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 & 4-1\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6+2+2-2-3-4=1$$

**10.06.** e

Usando a regra de Chió, temos:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & \boxed{1} & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5-7\cdot 1 & 3-2\cdot 1 & 2-3\cdot 1 \\ 6-7\cdot 1 & 2-2\cdot 1 & 4-3\cdot 1 \\ 7-7\cdot 1 & 1-2\cdot 1 & 6-3\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1+3-2=0$$

**10.07.** d

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1 \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=-1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} & \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} & \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & (-1)^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}$$

**10.08.** d

Usando a regra de Chió, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 7 & 10 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 13 \end{vmatrix} = -3$$

$$(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & 7-6 & 10-8 \\ 1+1 & -2+3 & -3+4 \\ 5-3 & 9-9 & 13-12 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x-2+2-4-2=-3 \Rightarrow x=3$$

**10.09.** b

Multiplicando a terceira coluna por –1 e somando com a quarta, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Usando a regra de Chió, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & \boxed{1} \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3+2 & 2+3 & 4+2 \\ 2-2 & 4-3 & 3-2 \\ 4-0 & 3-0 & 2-0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (10 + 20 - 24 - 15) = 9$$

**10.10.** 12

Determinante da matriz de Vandermonde:

$\det(V) = (2-1) \cdot (3-1) \cdot (3-2) \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3)$

$\det(V) = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\det(V) = 12$

**10.11.** a

O primeiro membro da equação é o determinante de uma matriz de Vandermonde.

$(2-1) \cdot (\text{sen}2x - 1) \cdot (\text{sen}2x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}2x - 1 = 0$ ou $\text{sen}2x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}2x = 1$ ou $\text{sen}2x = 2$

- $\text{sen}2x = 1$
- $\text{sen}2x = 2$ (não existe solução real)

Como $0 \le x \le \pi$, a solução da equação $\text{sen}2x = 1$ é:

$2x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

**10.12.** a

Multiplicamos a primeira linha por –1 e somamos com a segunda, com a terceira e com a quarta.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 2 & 2 \\ 0 & x-1 & x-2 & 3 \\ 0 & x-1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha por –1 e somamos com a terceira e com a quarta.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 2 & 2 \\ 0 & x-1 & x-2 & 3 \\ 0 & x-1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-4 & x-5 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos a terceira linha por –1 e somamos com a quarta.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-4 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$$

Assim:

$\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-6 \end{vmatrix} = 0$$

$x \cdot (x-1) \cdot (x-4) \cdot (x-6) = 0$

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 4$ ou $x = 6$

O conjunto solução da equação é {0, 1, 4, 6}.

**10.13.** 15 (01, 02, 04, 08)

01) CORRETO

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

02) CORRETO

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a \cdot d \cdot f$$

04) CORRETO

O determinante de qualquer matriz quadrada é igual ao determinante da sua transposta.

08) CORRETO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

$[\det(A)]^n = 1^n = 1$

16) INCORRETO

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen}a & \cos a \\ \cos a & \text{sen}a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \text{sen}a \cdot \text{sen}a - \cos a \cdot \cos a$$

$$\Rightarrow \det(A) = \text{sen}^2 a - \cos^2 a$$

Como $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, então $\det(A) = -\cos 2a$.

**10.14.** b

Multiplicamos a segunda linha por –2 e somamos com a primeira.

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 10 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 10 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Usando o teorema de Laplace, temos:

$$x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 10 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Usando a regra de Chió, temos:

$$x=(-1)\cdot\begin{vmatrix}\boxed{1} & 2 & -1 & 4\\ 3 & 7 & -2 & 14\\ -1 & -1 & 2 & -3\\ 2 & 6 & 1 & 9\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7-6 & -2+3 & 14-12\\ -1+2 & 2-1 & -3+4\\ 6-4 & 1+2 & 9-8\end{vmatrix}$$

$$x=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(1+2+6-4-1-3)=-1$$

Portanto, $3x=3\cdot(-1)=-3$.

**10.15.** d

Multiplicamos a primeira linha por –1 e somamos com a segunda, com a terceira e com a quarta.

$$\begin{vmatrix}m & 1 & 1 & 1\\ m & 1+p & 1 & 1\\ m & 1 & 1+r & 1\\ m & 1 & 1 & 1+s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m & 1 & 1 & 1\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & r & 0\\ 0 & 0 & 0 & s\end{vmatrix}$$

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Portanto:

$$\begin{vmatrix}m & 1 & 1 & 1\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & r & 0\\ 0 & 0 & 0 & s\end{vmatrix}=m\cdot p\cdot r\cdot s$$

**10.16.** e

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2+2^x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3-2^x & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-2^x\end{vmatrix}=0$$

Multiplicamos a primeira linha por –1 e somamos com a segunda, com a terceira e com a quarta.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+2^x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-2^x & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2^x\end{vmatrix}=0$$

$$(1+2^x)\cdot(2-2^x)\cdot(-2^x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2^x=0 \text{ ou } 2-2^x=0 \text{ ou } -2^x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x=-1 \text{ ou } 2^x=2 \text{ ou } 2^x=0$$

Supondo que **x** é um número real, então $2^x>0$.

Portanto:

$2^x=2$

**10.17.** c

$$\begin{vmatrix}x-1 & 2 & x\\ 0 & 1 & -1\\ x & x-1 & x\end{vmatrix}=x^2-x-2x-x^2+x^2-2x+1=x^2-5x+1$$

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & -1\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ \boxed{1} & 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}2-0 & -1-0 & 0-0\\ 2-1 & -2+1 & -1-2\\ 4-2 & -3+2 & 1-4\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(6+6-3-6)=-3$$

$$x^2-5x+1\le -3\Rightarrow x^2-5x+4\le 0\Rightarrow 1\le x\le 4$$

**10.18.** e

I. VERDADEIRA

Multiplicamos a primeira linha por 3 e somamos com a terceira.

Multiplicamos a primeira linha por –2 e somamos com a quarta.

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 0 & 5\\ 5 & 11 & 0 & 7\\ -1 & -1 & 0 & -3\end{vmatrix}$$

Usando o teorema de Laplace, temos:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 0 & 5\\ 5 & 11 & 0 & 7\\ -1 & -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 5 & 11 & 7\\ -1 & -1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot(-99-28-25+55+60+21)=16$$

Portanto, o determinante é um quadrado perfeito.

II. FALSA

$\det(3A)=18$

$3^2\cdot\det A=18\Rightarrow \det A=2$

$\det(A\cdot B^t)=6$

$\det A\cdot\det B^t=6\Rightarrow 2\cdot\det B^t=6\Rightarrow \det B^t=3$

Portanto, $\det B=\det B^t=3$.

III. VERDADEIRA

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & 2 & -1\\ 6 & x & 1\end{vmatrix}=0$$

$2-6+x^2-12-x+x=0$

$x^2=16\Rightarrow x=4 \text{ ou } x=-4$

Portanto, os valores de **x** são inteiros e opostos.

**10.19.** a)

$\det(A)>0$

$$\begin{vmatrix}x & 2 & 0\\ 2 & x & 6\\ 0 & 6 & 16x\end{vmatrix}>0$$

$16x^3-64x-36x>0$

$x\cdot(4x^2-25)>0\Rightarrow x>0 \text{ e } 4x^2-25>0$ ou

$x<0 \text{ e } 4x^2-25<0$

• $x>0 \text{ e } 4x^2-25>0\Rightarrow x>0 \text{ e } (x<-2,5 \text{ ou } x>2,5)\Rightarrow x>2,5$

• $x<0 \text{ e } 4x^2-25<0\Rightarrow x<0 \text{ e } (-2,5<x<2,5)\Rightarrow -2,5<x<0$

Portanto, $-2,5<x<0$ ou $x>2,5$.

b)

$B=A\cdot C$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 6\\ 0 & 6 & -32\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-6+8\\ 6-8-6\\ 24+32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -8\\ 56\end{bmatrix}$$

## Aula 11

**11.01.** c

a) FALSA. Duas matrizes nulas que não são do mesmo tipo são diferentes.

b) FALSA. Uma matriz admite inversa somente se seu determinante for diferente de zero.

c) VERDADEIRA. A matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação de matrizes.

d) FALSA. Existem matrizes quadradas com determinante nulo.

e) FALSA. Nem sempre existem os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Mesmo que ambos os produtos existam, em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$.

**11.02.** a

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6a+2c & 6b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6a+2c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } c=-1$$

$$\begin{cases} 6b+2d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \text{ e } d=3$$

Portanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

**11.03.** c

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+4c & b+4d \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+4c=1 \\ 2c=0 \end{cases} \Rightarrow a=1 \text{ e } c=0$$

$$\begin{cases} b+4d=0 \\ 2d=1 \end{cases} \Rightarrow b=-2 \text{ e } d=\frac{1}{2}$$

Portanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

**11.04.** a

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=1 \text{ e } c=-1$$

$$\begin{cases} 2b+d=0 \\ b+d=1 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \text{ e } d=2$$

A soma dos elementos da matriz inversa da matriz **A** é:

$$a+b+c+d = 1+(-1)+(-1)+2 = 1$$

**11.05.** e

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = 7+10-20-\frac{28}{3} = -\frac{37}{3}$$

Portanto:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-\frac{37}{3}} = -\frac{3}{37}$$

**11.06.** c

$$\det(A) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(2-x)\cdot(5-x)\cdot(5-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ e } x \neq 5$$

**11.07.** a

$$A \cdot M = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 & -1+2y \\ 2x-6 & -2+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$-1+2y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

$$-2+6y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Portanto, $xy = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

**11.08.** d

$$A \cdot B = I_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & p \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}+pq \\ 0 & \frac{q}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{q}{4} = 1 \Rightarrow q = 4$$

$$\frac{1}{3}+pq=0 \Rightarrow p \cdot 4 = -\frac{1}{3} \Rightarrow p = -\frac{1}{12}$$

Portanto, $q-12p = 4-12\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = 5$.

**11.09.** b

$$A=\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=-1+m$$

$$\det(A)=2\cdot\det(A^{-1})$$

$$\det(A)=2\cdot\frac{1}{\det(A)}$$

$$[\det(A)]^2=2$$

$$(m-1)^2=2\Rightarrow m-1=\sqrt{2} \text{ ou } m-1=-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m=\sqrt{2}+1 \text{ ou } m=-\sqrt{2}+1$$

A soma dos valores de **m** é $(\sqrt{2}+1)+(-\sqrt{2}+1)=2$.

**11.10.** a

$$b_{ij}=\frac{1}{\det(A)}\cdot \text{cofator}(a_{ji})$$

$$b_{23}=\frac{1}{\det(A)}\cdot \text{cofator}(a_{32})$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3$$

$$\text{cofator}(a_{32})=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(0-2)=2$$

$$b_{23}=\frac{1}{\det(A)}\cdot \text{cofator}(a_{32})=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$$

**11.11.** d

$$16\det(A^{-1})=\det(2A)$$

$$16\cdot\frac{1}{\det(A)}=2^2\cdot\det(A)$$

$$[\det(A)]^2=4\Rightarrow \det(A)=2 \text{ (pois } \det(A)>0)$$

**11.12.** b

$$(X\cdot A)^t=B$$

$$[(X\cdot A)^t]^t=B^t$$

$$X\cdot A=B^t$$

Multiplicamos o lado direito de cada membro pela inversa da matriz **A**.

$$X\cdot A\cdot A^{-1}=B^t\cdot A^{-1}$$

$$X\cdot I=B^t\cdot A^{-1}$$

$$X=B^t\cdot A^{-1}$$

**11.13.** 19 (01, 02, 16)

01) VERDADEIRO

$$A\cdot B=I_2$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a+b & -a+3b\\ 2c+d & -c+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+b=1\\ -a+3b=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{3}{7} \text{ e } b=\frac{1}{7}$$

$$\begin{cases}2c+d=0\\ -c+3d=1\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{1}{7} \text{ e } d=\frac{2}{7}$$

Portanto, $b+c=\frac{1}{7}+\left(-\frac{1}{7}\right)=0$.

02) VERDADEIRO

$$C^t+B\cdot C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$C^t+B\cdot C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 10 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 9\\ 13 & 7\end{bmatrix}$$

04) FALSO

$$B^t=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

Como B e $B^t$ são diferentes, a matriz **B** não é simétrica.

08) FALSO

Sempre é possível multiplicar uma matriz pela sua transposta.

16) VERDADEIRO

$$B\cdot X=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2a-b=-3\\ a+3b=2\end{cases}\Rightarrow a=-1 \text{ e } b=1$$

Portanto, $a+b=-1+1=0$.

**11.14.** b

1. VERDADEIRA

$\det(A)=-\text{sen}^2x+1=\cos^2 x$

Como $\cos^2 x$ varia de 0 a 1, o determinante da matriz **A** nunca é negativo.

2. FALSA

$$A-B=\begin{bmatrix}\text{sen}x & 1\\ -1 & -\text{sen}x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{sen}x & 0\\ 0 & -\text{sen}x\end{bmatrix}\neq -A$$

3. VERDADEIRA

$\det(A)\neq 0$

$$\cos^2 x\neq 0\Rightarrow \cos x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, \text{ com } k\in\mathbb{Z}$$

Se **x** pertence ao intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, então $\cos x\neq 0$. Portanto, a matriz **A** tem inversa.

4. FALSO

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\text{sen}x & 1\\ -1 & -\text{sen}x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \text{sen}x\\ \text{sen}x & -1\end{bmatrix}\neq A^t$$

**11.15.** a

Seja $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ b & * & * & *\\ c & * & * & *\\ d & * & * & *\end{bmatrix}$ a matriz inversa de **A**.

Assim:

$$A\cdot A^{-1}=I_4$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & * & * & *\\ b & * & * & *\\ c & * & * & *\\ d & * & * & *\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a+b+c+d=1\\ a+2b+3c+4d=0\\ a+4b+9c+16d=0\\ a+8b+27c+64d=0\end{cases}$$

A primeira equação do sistema mostra que a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de **A** é 1.

**11.16.** c

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1^2+2 & 1^2+3 \\ 1 & 2 & 2^2+3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$tg405° = tg45° = 1$ $\quad\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$

$sen\frac{3\pi}{2} = -1$ $\quad\sec\pi = \frac{1}{\cos\pi} = \frac{1}{-1} = -1$

$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ $\quad\cos 12\pi = \cos 0 = 1$

$cotg\frac{45\pi}{4} = cotg\frac{5\pi}{4} = 1$ $\quad cossec 450° = \frac{1}{sen450°} = \frac{1}{sen90°} = 1$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8+21+4-8-6-14=5$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+3+3-3+1+3=8$$

$C = A \cdot B$

$\det(C) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\det(C) = 5\cdot 8 = 40$

$$\det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)} = \frac{1}{40}$$

**11.17.** c

$M\cdot M^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ 2a=0 \end{cases} \Rightarrow a=0 \text{ e } c=-1$$

$$\begin{cases} b-d=0 \\ 2b=1 \end{cases} \Rightarrow b=\frac{1}{2} \text{ e } d=\frac{1}{2}$$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$M\cdot N^T - M^{-1}\cdot N=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M\cdot N^T - M^{-1}\cdot N=\begin{bmatrix} 2-1 & -1-3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2-\frac{1}{2} & -1+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$M\cdot N^T - M^{-1}\cdot N=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

**11.18.** 06 (02, 04)

01) INCORRETA

$$\begin{cases} 2X+Y=\begin{pmatrix} -3 & 9 & -5 \\ 17 & -11 & 21 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} -5 & 11 & -7 \\ 30 & -21 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por –2 e somando com a segunda, temos:

$$\begin{cases} -4X-2Y=\begin{pmatrix} 6 & -18 & 10 \\ -34 & 22 & -42 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} -5 & 11 & -7 \\ 30 & -21 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$-X=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

02) CORRETA

$A\cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 5a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ e } c=-5$$

$$\begin{cases} 2b+d=0 \\ 5b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \text{ e } d=2$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot B^t=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

04) CORRETA

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}=0$$

$x^3-2+x-x-x+2x^2=0$

$x^3+2x^2-x-2=0$

$x^2\cdot(x+2)-1\cdot(x+2)=0$

$(x+2)\cdot(x^2-1)=0$

$x+2=0$ ou $x^2-1=0$

$x=-2$ ou $x=1$ ou $x=-1$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S=\{-2,-1,1\}$, contido no intervalo [–2, 1].

**11.19.**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{sen}(1+1)\cdot\pi & \cos(2-1)\cdot\pi \\ \cos(1-2)\cdot\pi & \text{sen}(2+2)\cdot\pi \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} \text{sen}2\pi & \cos\pi \\ \cos(-\pi) & \text{sen}4\pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=I_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow a=0, b=-1, c=-1 \text{ e } d=0$$

Portanto:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**11.20.**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-1+1 & 0 & 0 \\ 2-1+1 & 2-2+1 & 0 \\ 3-1+1 & 3-2+1 & 3-3+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=I_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ 3a+2d+g & 3b+2e+h & 3c+2f+i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a=1$

$b=0$

$c=0$

$2a+d=0\Rightarrow d=-2$

$2b+e=1\Rightarrow e=1$

$2c+f=0\Rightarrow f=0$

$3a+2d+g=0\Rightarrow g=1$

$3b+2e+h=0\Rightarrow h=-2$

$3c+2f+i=1\Rightarrow i=1$

Portanto:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Aula 12

**12.01.** e

$3x+ky-z=0$

$3\cdot5+k\cdot(-1)-3=14$

$15-k-3=14\Rightarrow k=-2$

**12.02.** b

$$\begin{cases} 3x+y=15 \\ 4x+3y=25 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por –3 e somando com a segunda, temos:

$$\begin{cases} -9x-3y=-45 \\ 4x+3y=25 \end{cases}$$

$-5x=-20\Rightarrow x=4$

$3x+y=15$

$3\cdot4+y=15\Rightarrow y=3$

Portanto, a solução do sistema é (4, 3).

**12.03.** c

$$\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x-2y+z=-2 \\ x+z=0 \end{cases}$$

- $x+z=0\Rightarrow z=-x$
- $2x+y-z=5\Rightarrow 2x+y-(-x)=5\Rightarrow y=5-3x$
- $3x-2y+z=-2\Rightarrow 3x-2\cdot(5-3x)+(-x)=-2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-10+6x-x=-2\Rightarrow x=1$

Assim:

$z=-x\Rightarrow z=-1$

$y=5-3x\Rightarrow y=5-3\cdot1\Rightarrow y=2$

$x+y+z=1+2+(-1)=2$

**12.04.** 54 (02, 04, 16, 32)

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$2x=8\Rightarrow x=4$

$x+y=7\Rightarrow 4+y=7\Rightarrow y=3$

01) INCORRETO

$2x=2\cdot4=8$

02) CORRETO

$3x+y=3\cdot4+3=15$

04) CORRETO

$-x-3y=-4-3\cdot3=-13$

08) INCORRETO

$2y=2\cdot3=6$

16) CORRETO

$x^2-y^2=4^2-3^2=7$

32) CORRETO

$7\cdot(x-y)=7\cdot1=7=x+y$

**12.05.** d

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}=-3+12-6+12=15$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 6 & -12\end{vmatrix}=12+24-6=30$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{30}{15}=2$$

**12.06.** c

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-2=0\Rightarrow 3x+2y=12$$

$$\begin{cases}3x-2y=0\\ 3x+2y=12\end{cases}$$

$$6x=12\Rightarrow x=2$$

$$3x+2y=12\Rightarrow 3\cdot 2+2y=12\Rightarrow y=3$$

Portanto, $x+y=2+3=5$ .

**12.07.** c

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\ 3 & -1 & -5\\ 4 & -4 & -3\end{vmatrix}=3+60-20-20=23$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 3 & -5\\ 4 & -4 & -3\end{vmatrix}=-9-40+60+60+18-20=69$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{69}{23}=3$$

**12.08.** d

$$D=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=16+8+9+4+6-48=-5$$

$$D_y=\begin{vmatrix}4 & 9 & 1\\ 3 & 11 & 4\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-88+72+6-22+54-32=-10$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

**12.09.** e

Sejam **x** e **y**, respectivamente, os preços do quilograma de café do tipo I e do tipo II.

$$\begin{cases}2x+3y=5\cdot 4{,}80\\ 3x+2y=5\cdot 5{,}20\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+3y=24\\ 3x+2y=26\end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por –2 e a segunda por 3, temos:

$$\begin{cases}-4x-6y=-48\\ 9x+6y=78\end{cases}$$

$$5x=30\Rightarrow x=6$$

$$2x+3y=24\Rightarrow 2\cdot 6+3y=24\Rightarrow y=4$$

Portanto, o quilograma do café do tipo I custa R$ 6,00 e do tipo II custa R$ 4,00.

**12.10.** a

Somando as três equações, temos:

$$4x+4y+4z=16+15+17$$
$$4x+4y+4z=48$$
$$x+y+z=12$$

Assim:

$$x+2y+z=16$$
$$y+(x+y+z)=16$$
$$y+12=16\Rightarrow y=4$$

$$2x+y+z=15$$
$$x+(x+y+z)=15$$
$$x+12=15\Rightarrow x=3$$

$$x+y+2z=17$$
$$z+(x+y+z)=17$$
$$z+12=17\Rightarrow z=5$$
$$a\cdot b\cdot c=3\cdot 4\cdot 5=60$$

**12.11.** e

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=16-2+9-8-12+3=6$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1\\ 8 & 4 & -1\\ 20 & 3 & 4\end{vmatrix}=96-20+24-80-32+18=6$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 6 & 1\\ 3 & 8 & -1\\ 2 & 20 & 4\end{vmatrix}=32-12+60-16-72+20=12$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{6}{6}=1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{12}{6}=2$$

$$x+y+z=6$$
$$1+2+y=6\Rightarrow y=3$$

Portanto:

$$x^2+y^2+z^2=1+2^2+3^2=1+4+9=14$$

**12.12.** d

Sejam **x**, **y** e **z**, respectivamente, as quantidades de cédulas de 10, 50 e 100 dólares.

$$\begin{cases}x+y+z=45\\ 10x+50y+100z=1950\\ x=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=45\\ x+5y+10z=195\\ x=2z\end{cases}$$

- $x+y+z=45$
  $2z+y+z=45\Rightarrow y=45-3z$
- $x+5y+10z=195$
  $2z+5\cdot(45-3z)+10z=195$
  $2z+225-15z+10z=195$
  $-3z=-30\Rightarrow z=10$

Portanto, o valor recebido em notas de 100 foi de $10\cdot 100=1000$ dólares.

**12.13.** b

$$\begin{cases} x+2y+3z=36 \\ 2x+y+2z=36 \\ 2x+y+3z=42 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da terceira, temos:

$3z-2z=42-36$

$z=6$

Somando as duas primeiras equações, temos:

$3x+3y+5z=72$

$3x+3y+5\cdot 6=72$

$3x+3y=42$

$x+y=14$

Portanto

$x+y+z=14+6=20$

**12.14.** c

Sejam **a**, **b** e **c**, respectivamente, os diâmetros dos círculos **R**, **Q** e **P**.

Assim:

$$\begin{cases} a+b=12 \\ a+c=16 \\ b+c=18 \end{cases}$$

Somando as três equações, temos:

$2a+2b+2c=12+16+18$

$a+b+c=23$

Assim:

$12+c=23 \Rightarrow c=11$

$16+b=23 \Rightarrow b=7$

$18+a=23 \Rightarrow a=5$

**12.15.** c

Somando as quatro equações, temos:

$3x+3y+3z+3t=-1+5+7+4$

$3x+3y+3z+3t=15$

$x+y+z+t=5$

**12.16.** a

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \\ 115 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3y+4z \\ x+5z \\ 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \\ 115 \\ 48 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y+4z=134 \\ x+5z=115 \\ 2x+y=48 \end{cases}$$

- $x+5z=115 \Rightarrow x=115-5z$
- $2x+y=48 \Rightarrow 2\cdot(115-5z)+y=48 \Rightarrow y=10z-182$
- $3y+4z=134 \Rightarrow 3\cdot(10z-182)+4z=134 \Rightarrow z=20$

Portanto:

$x=115-5\cdot 20=15$

$y=10\cdot 20-182=18$

$x+y+z=15+18+20=53$

O total a ser pago pela compra de uma unidade de cada tipo de camisa é R$ 53,00.

**12.17.** d

Sejam **x**, **y** e **z**, os preços, em ordem crescente dos três ímãs de geladeira e **Q** a quantia que Tânia possuía.

Assim:

$$\begin{cases} x+y+z=Q+1{,}7 \\ y+z=Q-2 \\ x+y=Q-6{,}7 \\ x+z=Q-4{,}9 \end{cases}$$

Somando a segunda, a terceira e a quarta equações, temos:

$2x+2y+2z=3Q-13{,}6$

$2\cdot(x+y+z)=3Q-13{,}6$

$2\cdot(Q+1{,}7)=3Q-13{,}6$

$2Q+3{,}4=3Q-13{,}6$

$Q=17$

Portanto, Tânia possuía R$ 17,00.

**12.18.** c

Somando as três equações, temos:

$x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)=2005+2006+2007$

$(x+y+z)\cdot(x+y+z)=6018$

$(x+y+z)^2=2\cdot 3\cdot 1003$

$x+y+z=\sqrt{6018}$ ou $x+y+z=-\sqrt{6018}$

Assim:

$$x=\frac{2005}{x+y+z}=\frac{2005}{\sqrt{6018}}$$

$$y=\frac{2006}{x+y+z}=\frac{2006}{\sqrt{6018}}$$

$$z=\frac{2007}{x+y+z}=\frac{2007}{\sqrt{6018}}$$

ou

$$x=\frac{2005}{x+y+z}=-\frac{2005}{\sqrt{6018}}$$

$$y=\frac{2006}{x+y+z}=-\frac{2006}{\sqrt{6018}}$$

$$z=\frac{2007}{x+y+z}=-\frac{2007}{\sqrt{6018}}$$

Existem 2 ternos de números reais que satisfazem o sistema.

**12.19.** 30

Somamos a primeira equação com a segunda:

$2x=2 \Rightarrow x=1$

Somamos a primeira equação com a terceira:

$2y=4 \Rightarrow y=2$

Somamos a primeira equação com a quarta:

$2z=6 \Rightarrow z=3$

Substituímos os valores de **x**, **y** e **z** na primeira equação:

$x+y+z+t=11$

$1+2+3+t=11 \Rightarrow t=5$

Portanto:

$x\cdot y\cdot z\cdot t=1\cdot 2\cdot 3\cdot 5=30$

**12.20.** Sendo **a** e **b**, respectivamente, os preços dos modelos **A** e **B** e **Q** a quantia de que o negociante dispõe.

Assim:

$$\begin{cases} 5a+2b=Q+10000 \\ 3a+3b=Q-29000 \\ 8b=Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a+2b=8b+10000 \\ 3a+3b=8b-29000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a-6b=10000 \\ 3a-5b=-29000 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3 e a segunda por 5.

$$\begin{cases} -15a+18b=-30000 \\ 15a-25b=-145000 \end{cases}$$

$$-7b=-175000 \Rightarrow b=25000$$

$$Q=8b$$

$$Q=8\cdot 25000$$

$$Q=200000$$

O negociante dispõe de R$ 200.000,00.

## Aula 10

**10.01.** a

$$sen75° = sen(30° + 45°)$$
$$sen75° = sen30° \cdot cos45° + sen45° \cdot cos30°$$
$$sen75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$sen75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

**10.02.** c

$$tg105° = tg(60° + 45°)$$
$$tg105° = \frac{tg60° + tg45°}{1 - tg60° \cdot tg45°}$$
$$tg105° = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}$$
$$tg105° = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(1 - \sqrt{3})} \cdot \frac{(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})}$$
$$tg105° = \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

**10.03.** e

$$sen(\pi - x) = sen\pi \cdot cosx - senx \cdot cos\pi$$
$$sen(\pi - x) = 0 \cdot cosx - senx \cdot (-1)$$
$$sen(\pi - x) = senx$$

**10.04.** d

- $cos(x + 2\pi) = cosx \cdot cos2\pi - senx \cdot sen2\pi$

  $cos(x + 2\pi) = cosx \cdot 1 - senx \cdot 0 = cosx$
- $cos(x - 2\pi) = cosx \cdot cos2\pi - senx \cdot sen2\pi$

  $cos(x - 2\pi) = cosx \cdot 1 - senx \cdot 1 = cosx$

  $E = cos(x + 2\pi) + cos(x - 2\pi)$

  $E = cosx + cosx$

  $E = 2 \cdot cosx$

**10.05.** b

$$sen10° \cdot cos20° + sen20° \cdot cos10° = sen(10° + 20°)$$
$$sen10° \cdot cos20° + sen20° \cdot cos10° = sen(30°) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

**10.06.** a

- $cos(\pi + x) = cos\pi \cdot cosx - sen\pi \cdot senx$

  $cos(\pi + x) = (-1) \cdot cosx - 0 \cdot senx = -cosx$
- $cos(2\pi - x) = cos2\pi \cdot cosx + sen2\pi \cdot senx$

  $cos(2\pi - x) = 1 \cdot cosx + 0 \cdot senx = cosx$

  $cos(\pi + x) - 2 \cdot cos(2\pi - x) = -cosx - 2 \cdot cosx = -3 \cdot cosx$

**10.07.** c

- $sen(x + 45°) = senx \cdot cos45° + sen45° \cdot cosx$

  $sen(x + 45°) = senx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot cosx$
- $sen(x - 45°) = senx \cdot cos45° - sen45° \cdot cosx$

  $sen(x + 45°) = senx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot cosx$

  $sen(x + 45°) + sen(x - 45°) = 2 \cdot senx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot senx$

**10.08.** d

$$sen3x \cdot cosx + senx \cdot cos3x = sen(3x + x) = sen4x$$

**10.09.** a

$$sen(x - y) \cdot cosy + cos(x - y) \cdot seny = sen[(x - y) + y] = senx$$

**10.10.** b

$$sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = senx \cdot cos\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2} \cdot cosx$$
$$sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = senx \cdot 0 - 1 \cdot cosx = -cosx$$

Portanto:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{5}$$

**10.11.** a

$$\frac{sen40° \cdot cos10° - sen10° \cdot cos40°}{cos20° \cdot cos25° - sen20° \cdot sen25°} = \frac{sen(40° - 10°)}{cos(20° + 25°)} =$$
$$= \frac{sen30°}{cos45°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**10.12.** b

$$tg(x + y) = 2$$
$$\frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy} = 2$$
$$\frac{tgx + 1}{1 - tgx \cdot 1} = 2 \Rightarrow tgx + 1 = 2 - 2 \cdot tgx \Rightarrow tgx = \frac{1}{3}$$

**10.13.** e

Seja **x** a distância entre a parede e o ponto **X** e **h** a altura em que a lâmpada foi colocada.

- $tg12° = \frac{x}{h} \Rightarrow \frac{x}{h} = 0{,}2 \Rightarrow x = 0{,}2h$
- $tg(12° + 35°) = \frac{x + 8}{h} \Rightarrow \frac{tg12° + tg35°}{1 - tg12° \cdot tg35°} = \frac{0{,}2h + 8}{h} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{0{,}2 + 0{,}7}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}2h + 8}{h} \Rightarrow \frac{0{,}9}{0{,}86} = \frac{0{,}2h + 8}{h} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 0{,}9h = 0{,}172h + 6{,}88 \Rightarrow h = \frac{6{,}88}{0{,}728} \simeq 9{,}45$

**10.14.** a

Seja θ o menor ângulo agudo do triângulo cujos catetos medem 0,5 cm e 10 cm.

$$tg\theta = \frac{0{,}5}{10} = \frac{1}{20}$$
$$tg(\theta + \beta) = \frac{2{,}5}{10} \Rightarrow \frac{tg\theta + tg\beta}{1 - tg\theta \cdot tg\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{20} + tg\beta}{1 - \frac{1}{20} \cdot tg\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 + 20tg\beta}{20 - tg\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 + 80tg\beta = 20 - tg\beta \Rightarrow tg\beta = \frac{16}{81}$$

**10.15.** e

Seja **L** a medida dos lados de cada quadrado. A diagonal de um quadrado de lado L mede $L\sqrt{2}$.

$$\text{sena}=\frac{L}{L\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos a=\frac{L}{L\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seja **D** a medida de cada diagonal do retângulo de dimensões **L** e **2L**.

$$D^2=L^2+(2L)^2\Rightarrow D^2=5L^2\Rightarrow D=L\sqrt{5}$$

$$\text{senb}=\frac{L}{L\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos b=\frac{2L}{L\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}(a+b)=\text{sena}\cdot\cos b+\text{senb}\cdot\cos a$$

$$\text{sen}(a+b)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

**10.16.** b

Seja **L** a medida dos lados de cada quadrado.

$$\text{tg}(C\hat{E}H)=\frac{CG}{EG}=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}(D\hat{E}H)=\frac{DH}{EH}=\frac{L}{3L}=\frac{1}{3}$$

$$\text{tg}(C\hat{E}H+D\hat{E}H)=\frac{\text{tg}(C\hat{E}H)+\text{tg}(D\hat{E}H)}{1-\text{tg}(C\hat{E}H)\cdot\text{tg}(D\hat{E}H)}$$

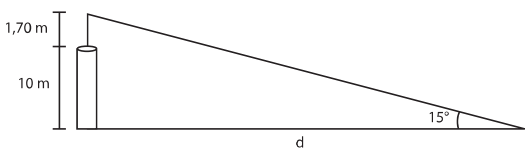
$$\text{tg}(C\hat{E}H+D\hat{E}H)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

Como $C\hat{E}H$ e $D\hat{E}H$ são ângulos agudos e $\text{tg}(C\hat{E}H+D\hat{E}H)=1$, então

$C\hat{E}H+D\hat{E}H=45°$.

**10.17.** e

Observe a figura (não está em escala) que ilustra a situação descrita no enunciado.




$$\text{tg}15°=\frac{11{,}7}{d}$$

$$d=\frac{11{,}7}{\text{tg}15°}$$

• $\text{tg}15°=\text{tg}(60°-45°)=\dfrac{\text{tg}60°-\text{tg}45°}{1+\text{tg}60°\cdot\text{tg}45°}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{3-1}=2-\sqrt{3}$$

$$d=\frac{11{,}7}{\text{tg}15°}=\frac{11{,}7}{2-\sqrt{3}}\simeq\frac{11{,}7}{2-1{,}7}=\frac{11{,}7}{0{,}3}=39\text{ m}$$

**Observação:**

Caso um aluno tenha racionalizado o denominador da fração antes de utilizar a aproximação para $\sqrt{3}$, terá encontrado outra resposta, não presente nas alternativas.

$$d=\frac{11{,}7}{2-\sqrt{3}}=\frac{11{,}7}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{11{,}7\cdot(2+1{,}7)}{4-3}=43{,}29\text{ m}$$

**10.18.** d

$$\text{sen}(a+b)=\text{sena}\cdot\cos b+\text{senb}\cdot\cos a$$

$$\text{sen}(a-b)=\text{sena}\cdot\cos b-\text{senb}\cdot\cos a$$

$$P=\text{sen}(a+b)\cdot\text{sen}(a-b)$$

$$P=(\text{sena}\cdot\cos b+\text{senb}\cdot\cos a)\cdot(\text{sena}\cdot\cos b-\text{senb}\cdot\cos a)$$

$$P=\text{sen}^2a\cdot\cos^2b-\text{sen}^2b\cdot\cos^2a$$

$$P=(1-\cos^2a)\cdot\cos^2b-(1-\cos^2b)\cdot\cos^2a$$

$$P=\cos^2b-\cos^2a\cdot\cos^2b-\cos^2a+\cos^2a\cdot\cos^2b$$

$$P=\cos^2b-\cos^2a$$

**10.19.** a) • $\cos^2x=1-\text{sen}^2x$

$$\cos^2x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

Como **x** pertence ao primeiro quadrante, então $\cos x=\dfrac{4}{5}$.

• $\cos^2y=1-\text{sen}^2y$

$$\cos^2y=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2y=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

Como **y** pertence ao primeiro quadrante, então $\cos y=\dfrac{3}{5}$.

b) • $\text{sen}(x+y)=\text{senx}\cdot\cos y+\text{seny}\cdot\cos x$

$$\text{sen}(x+y)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}$$

$$\text{sen}(x+y)=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}$$

$$\text{sen}(x+y)=1$$

• $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\text{senx}\cdot\text{seny}$

$$\cos(x-y)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$

$$\cos(x-y)=\frac{12}{25}+\frac{12}{25}$$

$$\cos(x-y)=\frac{24}{25}$$

**10.20.** 3

• $(\text{senx}+\text{seny})^2=\text{sen}^2x+2\cdot\text{senx}\cdot\text{seny}+\text{sen}^2y$

• $(\cos x+\cos y)^2=\cos^2x+2\cdot\cos x\cdot\cos y+\cos^2y$

$$(\text{senx}+\text{seny})^2+(\cos x+\cos y)^2=\text{sen}^2x+\cos^2x+$$

$$+\text{sen}^2y+\cos^2y+2\cdot(\cos x\cdot\cos y+\text{senx}\cdot\text{seny})$$

$$(\text{senx}+\text{seny})^2+(\cos x+\cos y)^2=1+1+2\cdot\cos(x-y)$$

$$(\text{senx}+\text{seny})^2+(\cos x+\cos y)^2=1+1+2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$(\text{senx}+\text{seny})^2+(\cos x+\cos y)^2=1+1+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$(\text{senx}+\text{seny})^2+(\cos x+\cos y)^2=3$$

## Aula 11

**11.01.** d

$sen(2A) = 2 \cdot senA \cdot cosA$

$sen(2A) = 2 \cdot x \cdot y$

**11.02.** e

$cos(2A) = cos^2 A - sen^2 A$

$cos(2A) = y^2 - x^2$

**11.03.** d

$sen(2A) = 2 \cdot senA \cdot cosA$

$A = 2x \Rightarrow sen(2 \cdot 2x) = 2 \cdot sen(2x) \cdot cos(2x)$

$\Rightarrow sen(4x) = 2 \cdot sen(2x) \cdot cos(2x)$

**11.04.** b

$cos(2A) = cos^2 A - sen^2 A$

**11.05.** c

a) FALSA

$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$x = 1$

$cos(2) = cos^2 1 - sen^2 1 = (cos1 - sen1) \cdot (cos1 + sen1)$

b) FALSA

$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$x = 10$

$cos(20) = cos^2 10 - sen^2 10 = (cos10 - sen10) \cdot (cos10 + sen10)$

c) VERDADEIRA

$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$x = 10°$

$cos(20°) = cos^2 10° - sen^2 10°$

d) FALSA

$cos60° = \frac{1}{2}$

$2 \cdot cos30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

e) FALSA

$cos60° = \frac{1}{2}$

$2 \cdot cos30° - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

**11.06.** b

$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$cos(2x) = cos^2 x - (1 - cos^2 x)$

$cos(2x) = 2 \cdot cos^2 x - 1$

**11.07.** c

$(sen22{,}5° + cos22{,}5°)^2 = sen^2 22{,}5° + 2 \cdot sen22{,}5° \cdot cos22{,}5° +$
$+ cos^2 22{,}5°$

$(sen22{,}5° + cos22{,}5°)^2 = 1 + sen(2 \cdot 22{,}5°)$

$(sen22{,}5° + cos22{,}5°)^2 = 1 + sen45° = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

**11.08.** e

$y = sen(22{,}5°) \cdot cos(22{,}5°)$

$2 \cdot y = 2 \cdot sen(22{,}5°) \cdot cos(22{,}5°)$

$2y = sen(2 \cdot 22{,}5°)$

$2y = sen45°$

$2y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}$

**11.09.** d

$\left(sen\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right)^2 = sen^2\frac{x}{2} + 2 \cdot sen\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}$

$\left(sen\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + sen\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$

$\left(sen\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + senx$

**11.10.** b

$M = 2 \cdot senA - cosA \cdot 2 \cdot senA \cdot cosA$

$M = 2 \cdot senA \cdot (1 - cos^2 A)$

$M = 2 \cdot senA \cdot sen^2 A$

$M = 2 \cdot sen^3 A$

$M = 2 \cdot (0{,}2)^3 = 2 \cdot (2 \cdot 10^{-1})^3$

$M = 2 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 16 \cdot 10^{-3} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$

**11.11.** d

$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$cos(2x) = cos^2 x - (1 - cos^2 x)$

$cos(2x) = 2 \cdot cos^2 x - 1$

$cos(2x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1$

$cos(2x) = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$

**11.12.** d

$cos\theta - sen\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$(cos\theta - sen\theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$cos^2\theta - 2 \cdot cos\theta \cdot sen\theta + sen^2\theta = \frac{6}{9}$

$1 - sen(2\theta) = \frac{2}{3} \Rightarrow sen(2\theta) = \frac{1}{3}$

**11.13.** a

$cos^4 x - sen^4 x = (cos^2 x + sen^2 x) \cdot (cos^2 x - sen^2 x)$

$cos^4 x - sen^4 x = 1 \cdot cos2x$

$cos^4 x - sen^4 x = cos2x$

**11.14.** c

$\begin{vmatrix} sen2x & 2cos^2 x \\ -cosx & senx \end{vmatrix} = sen2x \cdot senx + 2 \cdot cos^3 x =$

$= 2 \cdot senx \cdot cosx \cdot senx + 2 \cdot cos^3 x =$

$= 2 \cdot cosx \cdot (sen^2 x + cos^2 x) = 2 \cdot cosx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

**11.15.** 05 (01, 04)

01) CORRETA

$$tg(75°) = tg(45° + 30°)$$

$$tg(75°) = \frac{tg45° + tg30°}{1 - tg45° \cdot tg30°}$$

$$tg(75°) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$tg(75°) = \frac{(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})} \cdot \frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})} = \frac{9 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

02) INCORRETA

$$\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

$$\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Como **x** pertence ao primeiro quadrante, então $\cos(x) = \frac{3}{5}$.

04) CORRETA

$$tg(2x) = \frac{2 \cdot tg(x)}{1 - tg^2(x)} = \frac{2 \cdot 6}{1 - 6^2} = -\frac{12}{35}$$

08) INCORRETA

$$sen(x + 6\pi) = senx \cdot \cos 6\pi + sen6\pi \cdot \cos x$$

$$sen(x + 6\pi) = senx \cdot 1 + 0 \cdot \cos x = senx$$

**11.16.** d

$$\cos(2A) = 2 \cdot \cos^2 A - 1$$

$$A = \frac{x}{2}$$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\cos x = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

**11.17.** d

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

- $2x = 60° \Rightarrow x = 30°$
- $2x = 300° \Rightarrow x = 150°$
- $2x = 420° \Rightarrow x = 210°$
- $2x = 660° \Rightarrow x = 330°$

**11.18.** c

$$cotg(2x) = \frac{1}{5} \Rightarrow tg(2x) = 5$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tgx}{1 - tg\frac{\pi}{4} \cdot tgx} - \frac{tg\frac{\pi}{4} - tgx}{1 + tg\frac{\pi}{4} \cdot tgx} =$$

$$= \frac{1 + tgx}{1 - tgx} - \frac{1 - tgx}{1 + tgx} = \frac{(1+tgx)^2 - (1-tgx)^2}{(1-tgx) \cdot (1+tgx)} =$$

$$= \frac{1 + 2tgx + tg^2x - (1 - 2tgx + tg^2x)}{1 - tg^2x} = \frac{4tgx}{1 - tg^2x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2tgx}{1 - tg^2x} = 2 \cdot tg(2x) = 2 \cdot 5 = 10$$

**11.19.**

Seja **x** a altura da torre acima dos olhos da pessoa.

$$tg\alpha = \frac{x}{300}$$

$$tg2\alpha = \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{x}{300}}{1 - \left(\frac{x}{300}\right)^2} = \frac{x}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} = x - \frac{x^3}{300^2} \Rightarrow \frac{x^2}{300^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{300^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{300}{\sqrt{3}} = 100\sqrt{3}\ m$$

a) $tg\alpha = \frac{100\sqrt{3}}{300} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) Seja **h** a altura da torre.

$$h = x + 1{,}6$$

$$h = (100\sqrt{3} + 1{,}6)\ m$$

**11.20.** 5/27

$$CM = MN = NB = \frac{BC}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

- $tg(M\hat{A}B) = \frac{MB}{AB} = \frac{2}{5}$
- $tg(N\hat{A}B) = \frac{NB}{AB} = \frac{1}{5}$
- $tg(M\hat{A}N) = tg(M\hat{A}B - N\hat{A}B)$

$$tg(M\hat{A}N) = \frac{tg(M\hat{A}B) - tg(N\hat{A}B)}{1 + tg(M\hat{A}B) \cdot tg(N\hat{A}B)}$$

$$tg(M\hat{A}N) = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{27}{25}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{27} = \frac{5}{27}$$

## Aula 12

**12.01.** c

$$sen(x - y) \cdot \cos y + \cos(x - y) \cdot seny = sen[(x - y) + y] = senx$$

**12.02.** b

$$\cos^2(\alpha) = 1 - sen^2(\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Como $\alpha$ pertence ao segundo quadrante, então $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Portanto:

$$sen(2\alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

$$sen(2\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

**12.03.** b

Como **x** e **y** são complementares, então $x+y=90°$.

$E=(\cos x-\cos y)^2+(\text{sen}x+\text{sen}y)^2$

$E=\cos^2 x-2\cdot\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y+$

$+\text{sen}^2 x+2\cdot\text{sen}x\cdot\text{sen}y+\text{sen}^2 y$

$E=1+1-2\cdot(\cos x\cdot\cos y-\text{sen}x\cdot\text{sen}y)$

$E=2-2\cdot\cos(x+y)=2-2\cdot\cos 90°=2-2\cdot 0=2$

**12.04.** c

$\text{sen}^2 x=1-\cos^2 x$

$\text{sen}^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

Como **x** pertence ao primeiro quadrante, então $\text{sen}x=\frac{3}{5}$.

$$\text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

$$\text{tg}2x=\frac{2\cdot\text{tg}x}{1-\text{tg}^2 x}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7}=\frac{24}{7}$$

**12.05.** a

$\text{sen}A+\cos A=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$(\text{sen}A+\cos A)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\text{sen}^2 A+2\cdot\text{sen}A\cdot\cos A+\cos^2 A=\frac{5}{4}$

$1+\text{sen}(2A)=\frac{5}{4}\Rightarrow\text{sen}(2A)=\frac{1}{4}=0{,}25$

**12.06.** b

Considerando os valores de **x** para os quais existe a inversa da matriz **A**, temos:

$\det(A)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x=\cos(2x)$

$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}=\frac{1}{\cos(2x)}=\sec(2x)$

**12.07.** d

$\text{tg}(75°)=\text{tg}(45°+30°)$

$\text{tg}(75°)=\frac{\text{tg}45°+\text{tg}30°}{1-\text{tg}45°\cdot\text{tg}30°}$

$$\text{tg}(75°)=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\text{tg}(75°)=\frac{(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})}\cdot\frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}=\frac{9+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{9-3}=2+\sqrt{3}$$

**12.08.** e

$\cos(2x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos^2 x-\text{sen}^2 x=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}\cos^2 x-\text{sen}^2 x=\frac{1}{2}\\ \cos^2 x+\text{sen}^2 x=1\end{cases}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{3}{4}\text{ e }\text{sen}^2 x=\frac{1}{4}$$

- $\text{tg}^2 x+\sec^2 x=\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\text{tg}^2 x+\sec^2 x=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

**12.09.** a

$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\beta\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\text{sen}\beta\cdot\text{sen}\frac{\pi}{2}=-\text{sen}\beta$

$\text{sen}(\pi-\beta)=\text{sen}\pi\cdot\cos\beta-\text{sen}\beta\cdot\cos\pi=\text{sen}\beta$

$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\text{sen}(\pi-\beta)=-\text{sen}\beta+\text{sen}\beta=0$

O valor da expressão independe da medida do ângulo $\boldsymbol{\beta}$.

**12.10.** a

$\cos^2 x=1-\text{sen}^2 x$

$\cos^2 x=1-(0{,}8)^2=1-0{,}64=0{,}36$

Como **x** pertence ao segundo quadrante, então $\cos x=-0{,}6$.

$\text{sen}(2x)=2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x=2\cdot 0{,}8\cdot(-0{,}6)=-0{,}96$

$\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x$

$\cos(2x)=(-0{,}6)^2-(0{,}8)^2=0{,}36-0{,}64=-0{,}28$

$\text{sen}(2x)+\cos(2x)=-0{,}96+(-0{,}28)=-1{,}24$

**12.11.** 15 (01, 02, 04, 08)

$\text{sen}^2 x=1-\cos^2 x$

$\text{sen}^2 x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

Como x pertence ao primeiro quadrante, então $\text{sen}x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

01) CORRETO

$\text{sen}(x-\pi)=\text{sen}x\cdot\cos\pi-\text{sen}\pi\cdot\cos x$

$\text{sen}(x-\pi)=\text{sen}x\cdot(-1)-0\cdot\cos x=-\text{sen}x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

02) CORRETO

$\text{tg}(x+\pi)=\frac{\text{tg}x+\text{tg}\pi}{1-\text{tg}x\cdot\text{tg}\pi}=\frac{\text{tg}x+0}{1-\text{tg}x\cdot 0}=\text{tg}x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

04) CORRETO

$\text{sen}(2x)=2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

08) CORRETO

$\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}-\frac{5}{9}=-\frac{1}{9}$

16) INCORRETO

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\text{sen}x\cdot\text{sen}\frac{\pi}{2}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cdot 0-\text{sen}x\cdot 1=-\text{sen}x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

**12.12.** d

$$(\text{sen}3x+\cos 3x)^2=\text{sen}^2 3x+2\cdot\text{sen}3x\cdot\cos 3x+\cos^2 3x$$

$$(\text{sen}3x+\cos 3x)^2=1+\text{sen}(2\cdot 3x)$$

$$(\text{sen}3x+\cos 3x)^2=1+\text{sen}(6x)$$

O valor maior de sen(6x) é 1.
Portanto, o maior valor da expressão $1+\text{sen}(6x)$ é 1 + 1 = 2.

**12.13.** a

- $\text{tg}\alpha=2\Rightarrow\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}=2\Rightarrow\text{sen}\alpha=2\cdot\cos\alpha$

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow(2\cdot\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

- $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha$

$$\cos(2\alpha)=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$$

**12.14.** b

$$x+y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos y=\text{sen}x$$

- $1-\text{sen}^2x-\cos^2y=1-\text{sen}^2x-\text{sen}^2x=1-2\cdot\text{sen}^2x$

$$1-\text{sen}^2x-\cos^2y=\cos(2x)$$

- $1-\text{sen}^2x-\cos^2y=1-\cos^2y-\cos^2y=1-2\cdot\cos^2y$

$$1-\text{sen}^2x-\cos^2y=-\cos(2y)$$

**12.15.** e

$$\text{tg}x=\frac{2\cdot\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{2\cdot\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$2\cdot\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+3\cdot\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-2=0\Rightarrow\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\text{ ou }\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=-2$$

Como $0<x<\pi$, então $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Portanto, $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

**12.16.** a

$$\text{cotg}\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}=\sqrt{3}\Rightarrow\cos\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{3}\cdot\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)$$

- $\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)=1$

$$\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)+\left[\sqrt{3}\cdot\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2=1\Rightarrow\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

- $\text{sen}a=2\cdot\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{2}\right)=2\cdot\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)$

$$\text{sen}a=2\sqrt{3}\cdot\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**12.17.** c

Traçando o segmento AC, ficam determinados os triângulos ABC e ADC, congruentes entre si.
Assim:

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$$

$$(AC)^2=(2x)^2+x^2\Rightarrow(AC)^2=5x^2\Rightarrow AC=x\sqrt{5}$$

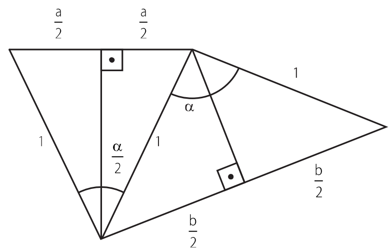
$$\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{x}{x\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2x}{x\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}A=2\cdot\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\text{sen}A=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

**12.18.** c



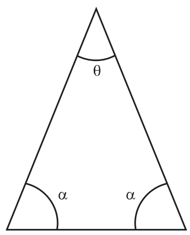
$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\frac{a}{2}}{1}\Rightarrow a=2\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{sen}\alpha=\frac{\frac{b}{2}}{1}\Rightarrow b=2\cdot\text{sen}\alpha$$

Assim:

$$\frac{b}{a}=\frac{2\cdot\text{sen}\alpha}{2\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=2\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

**12.19.** $-\sqrt{15}/7$



$$\alpha+\alpha+\theta=180°\Rightarrow\theta=180°-2\alpha$$

$$\text{tg}\theta=\text{tg}(180°-2\alpha)$$

$$\text{tg}\theta=\frac{\text{tg}180°-\text{tg}(2\alpha)}{1+\text{tg}180°\cdot\text{tg}(2\alpha)}$$

$$\text{tg}\theta=-\text{tg}(2\alpha)$$

$$\text{tg}\theta=-\frac{2\cdot\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\text{tg}\theta = -\frac{2\cdot\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

$$\text{tg}\theta = -\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = -\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot\frac{15}{14} = -\frac{15}{7\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{7}$$

**12.20.** 53

Seja **x** a medida dos segmentos AB, BM, MN e NC.

- $\text{tg}(B\hat{A}M) = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow B\hat{A}M = 45°$
- $\text{tg}(45° + \theta) = \frac{2x}{x} = 2$

$$\frac{\text{tg}45° + \text{tg}\theta}{1 - \text{tg}45°\cdot\text{tg}\theta} = 2 \Rightarrow \frac{1+\text{tg}\theta}{1-\text{tg}\theta} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \text{tg}\theta = 2 - 2\cdot\text{tg}\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{1}{3}$$

Portanto:

$$6\cdot\text{tg}\theta + 51 = 6\cdot\frac{1}{3} + 51 = 53$$

# Aula 10

**10.01.** V – V – V – F

(V) Seja **x** a medida da hipotenusa.

$x^2 = 6^2 + 8^2$

$x^2 = 36 + 64$

$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ cm

(V) A hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo, pois se opõe ao maior ângulo interno (ângulo reto).

(V) Seja $\theta$ a medida de cada ângulo interno de um triângulo retângulo isósceles.

$\theta + \theta + 90° = 180° \Rightarrow \theta = 45°$

(F) Seja **x** a medida do outro cateto.

$17^2 = 15^2 + x^2$

$289 = 225 + x^2$

$x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ cm

**10.02.** c

$\text{sen}40° = \frac{x}{8}$

$0{,}64 = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 5{,}12$

**10.03.** a

Seja **L** a medida dos lados de cada quadrado. A área do quintal é a soma das áreas dos 5 quadrados congruentes, ou seja, igual a $5 \cdot L^2$.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo BFG, temos:

$(BG)^2 = (BF)^2 + (FG)^2$

$(\sqrt{20})^2 = (2L)^2 + L^2$

$5L^2 = 20$

Portanto, a área do quintal é 20 m$^2$.

**10.04.** b

Seja **x** a medida do outro cateto.

$2^2 = 1^2 + x^2$

$x^2 = 4 - 1$

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ cm

A área do triângulo retângulo é igual a $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm$^2$.

**10.05.** e

Triângulo retângulo BHC:

$\text{sen}30° = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ cm

$\cos 30° = \frac{HC}{4} \Rightarrow HC = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

Triângulo retângulo ABC:

$(BH)^2 = AH \cdot HC$

$2^2 = x \cdot 2\sqrt{3}$

$x = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm

**10.06.** c

Sendo **x – r**, **x** e **x + r** as medidas dos lados do triângulo retângulo, temos:

$x - r + x + x + r = 6$

$3x = 6 \Rightarrow x = 2$ m

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$(2+r)^2 = (2-r)^2 + 2^2$

$4 + 4r + r^2 = 4 - 4r + r^2 + 4$

$8r = 4 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$\text{Área} = \frac{(2-r) \cdot 2}{2}$

$\text{Área} = 2 - r$

$\text{Área} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ m$^2$

**10.07.** 09 (01, 08)

01) CORRETO

No triângulo retângulo ABC, temos:

$AC = 50$ km

$BC = 30$ km

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$50^2 = (AB)^2 + 30^2 \Rightarrow (AB)^2 = 1600 \Rightarrow AB = 40$ km

O comprimento da estrada que será construída corresponde à altura do triângulo retângulo ABC, relativa à hipotenusa.

$AB \cdot BC = AC \cdot BX$

$40 \cdot 30 = 50 \cdot BX \Rightarrow BX = 24$ km

02) INCORRETO

$\text{sen}(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AC} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\text{sen}30° = \frac{1}{2}$

04) INCORRETO

No triângulo retângulo BXC, temos:

$BC = 30$ km

$BX = 24$ km

$(BC)^2 = (BX)^2 + (XC)^2$

$30^2 = 24^2 + (XC)^2 \Rightarrow (XC)^2 = 324 \Rightarrow XC = 18$ km

Portanto, a distância XC é menor que 20 km.

08) CORRETO

No triângulo retângulo BXA, temos:

$AB = 40$ km

$BX = 24$ km

$(AB)^2 = (BX)^2 + (AX)^2$

$40^2 = 24^2 + (AX)^2 \Rightarrow (AX)^2 = 1024 \Rightarrow AX = 32$ km

Portanto, a distância AX é maior que 30 km.

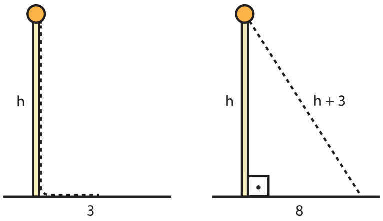
**Observação:**

Outra possibilidade para determinar a medida AX, conhecendo a medida XC, é:

$AX = AC - XC$

$AX = 50\text{ km} - 18\text{ km} = 32$ km

**10.08.** b




Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

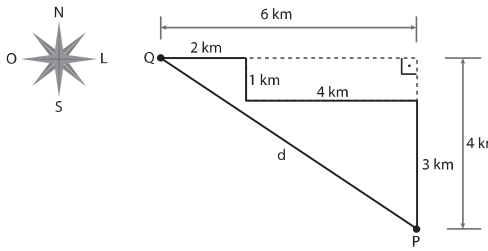
$(h+3)^2 = h^2 + 8^2$

$h^2 + 6h + 9 = h^2 + 64$

$6h = 55 \Rightarrow h = \dfrac{55}{6} \simeq 9{,}2$ chih

**10.09.** $2\sqrt{13}$ km

Observe a figura que representa a situação descrita.




Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = 6^2 + 4^2$

$d^2 = 36 + 16$

$d^2 = 52 \Rightarrow d = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ km

**10.10.** b

Seja **x** a medida de um cateto, **3x** a medida da hipotenusa e **y** a medida do outro cateto. Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$(3x)^2 = x^2 + y^2$

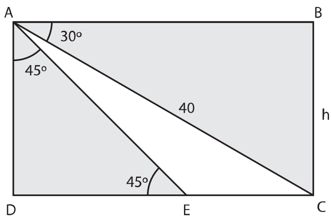
$9x^2 = x^2 + y^2$

$y^2 = 8x^2 \Rightarrow y = 2x\sqrt{2}$

Portanto, a razão entre a medida da hipotenusa e a medida do outro cateto é:

$$\frac{3x}{y} = \frac{3x}{2x\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

**10.11.** c




No triângulo retângulo ABC, temos:

$\text{sen}30° = \dfrac{h}{40} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{40} \Rightarrow h = 20$ cm

$\cos 30° = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AB}{40} \Rightarrow AB = 20\sqrt{3}$ cm

No triângulo retângulo ADE, temos:

$AD = BC = 20$ cm

$DE = AD = 20$ cm

Área do triângulo CAE:

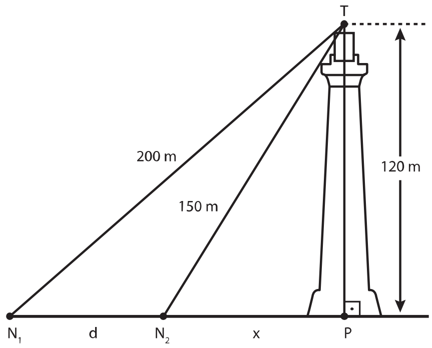
$S_{CAE} = \dfrac{EC \cdot h}{2}$

$EC = DC - DE$

$EC = 20\sqrt{3} - 20 = 20 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ cm

$S_{CAE} = \dfrac{20 \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot 20}{2} \simeq 200 \cdot (1{,}7 - 1) = 140\ \text{cm}^2$

**10.12.** a




No triângulo retângulo $PTN_2$, temos:

$150\ \text{m} = 5 \cdot 30\ \text{m}$

$120\ \text{m} = 4 \cdot 30\ \text{m}$

Assim:

$x = 3 \cdot 30\ \text{m} = 90\ \text{m}$

No triângulo retângulo $PTN_1$, temos:

$200\ \text{m} = 5 \cdot 40\ \text{m}$

$120\ \text{m} = 3 \cdot 40\ \text{m}$

Assim:

$d + x = 4 \cdot 40\ \text{m}$

$d + 90\ \text{m} = 160\ \text{m} \Rightarrow d = 70\ \text{m}$

**10.13.** d

Sendo **L** a medida dos lados do quadrado, temos:

$L^2 = a^2 + b^2$ (teorema de Pitágoras)

A área da região sombreada é a diferença entre a área do quadrado e a área dos quatro triângulos retângulos congruentes cujos catetos medem **a** e **b**.

Assim:

$S_{sombreada} = L^2 - 4 \cdot \dfrac{a \cdot b}{2}$

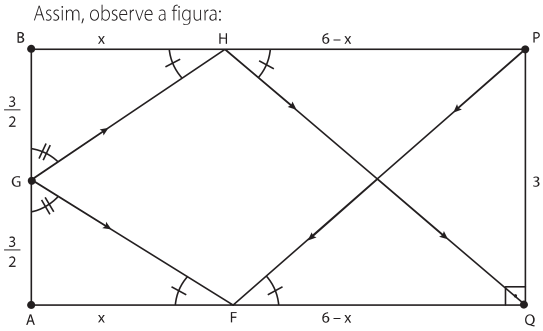
$S_{sombreada} = a^2 + b^2 - 2ab$

**10.14.** b

Os triângulos PQH e QPF são congruentes, pois têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado.

Os triângulos BHG e AFG são congruentes, pois têm ordenadamente um lado (BH e AF) e os ângulos adjacentes a esse lado.

Assim, observe a figura:



Da semelhança dos triângulos AFG e QFP, temos:

$$\frac{AF}{QF}=\frac{AG}{QP}=\frac{FG}{FP}$$

$$\frac{x}{6-x}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{FG}{FP}$$

- $\frac{x}{6-x}=\frac{\frac{3}{2}}{3}\Rightarrow x=2\text{ cm}$
- $\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{FG}{FP}\Rightarrow FP=2\cdot FG$

No triângulo retângulo QFP, temos:

$(FP)^2=4^2+3^2\Rightarrow FP=5\text{ cm}$

Assim:

$FP=2\cdot FG$

$5=2\cdot FG\Rightarrow FG=\frac{5}{2}\text{ cm}$

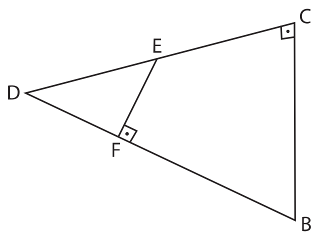
Portanto:

$PF+FG+GH+HQ=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+5$

$PF+FG+GH+HQ=15\text{ cm}$

**10.15.** V – V – V – V – F

Observe os triângulos CDB e FDE.




Vamos analisar as proposições:

(V) A distância entre A e B é a diagonal de uma face do cubo.

$AB=a\sqrt{2}$

$AB=6\sqrt{2}\text{ cm}$

(V) No triângulo retângulo ABD, temos:

$(BD)^2=(AB)^2+(AD)^2$

$(BD)^2=(6\sqrt{2})^2+6^2$

$(BD)^2=108\Rightarrow BD=6\sqrt{3}\text{ cm}$

(V) Os ângulos $B\hat{C}D$ e $E\hat{F}D$ são retos e os dois triângulos têm um ângulo comum (de vértice D). Portanto, os triângulos são semelhantes.

(V) $\text{sen}(F\hat{D}E)=\frac{BC}{BD}=\frac{6}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(F) Da semelhança dos triângulos CDB e FDE, temos:

$\frac{CB}{FE}=\frac{DB}{DE}$

$DE=\frac{CD}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\text{ cm}$

$\frac{6}{FE}=\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\Rightarrow FE=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}\text{ cm}$

**10.16.** a

$(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$

$(BC)^2=3^2+4^2\Rightarrow BC=5\text{ m}$

Assim:

$\frac{h_1}{5}=\frac{h_2}{4}=\frac{h_3}{3}=k$

$h_1=5k$

$h_2=4k$

$h_3=3k$

$\frac{4h_2+3h_3}{h_1}=\frac{4\cdot 4k+3\cdot 3k}{5k}=\frac{25k}{5k}=5$

**10.17.** 29 (01, 04, 08, 16)

Em um período de 12 horas (das 7 horas às 19 horas) o ângulo de incidência varia 180° (de 0° a 180°). Assim, a cada hora o ângulo de incidência varia 15°.

01) CORRETO

Das 7 horas às 11 horas (4 horas).

Assim, o ângulo de incidência é igual a $4\cdot 15°=60°$.

02) INCORRETO

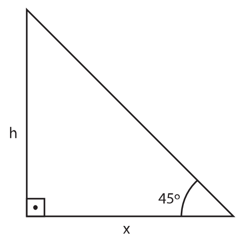
Como $\frac{90°}{15°}=6$, o ângulo de incidência é reto exatamente às $7+6=13$ horas.

04) CORRETO

Das 7 horas às 10 horas (3 horas).

Assim, o ângulo de incidência é igual a $3\cdot 15°=45°$.

Quando o ângulo de incidência é de 45°, o comprimento da sombra de um objeto é igual à sua altura.




No triângulo retângulo isósceles, $x=h$.

08) CORRETO

Sendo $\alpha$ o ângulo de incidência, com $0°<\alpha<90°$, **x** o comprimento da sombra e **h** a altura de um objeto, temos:

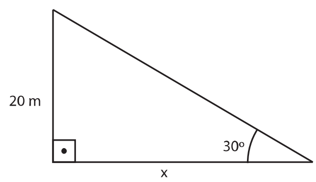
$tg\alpha=\frac{h}{x}\Rightarrow x=\frac{h}{tg\alpha}$

Portanto, no início do dia, (antes das 13 horas), o comprimento da sombra é inversamente proporcional à tangente do ângulo de incidência.

16) CORRETO

Das 7 horas às 9 horas (2 horas).

Assim, o ângulo de incidência é igual a $2\cdot 15°=30°$.

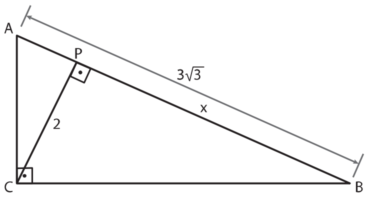



$tg30°=\frac{20}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{20}{x}$

$x=\frac{60}{\sqrt{3}}=\frac{60}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}\text{ m}$

**10.18.** a




$(CP)^2 = AP \cdot PB$

$2^2 = (3\sqrt{3} - x) \cdot x$

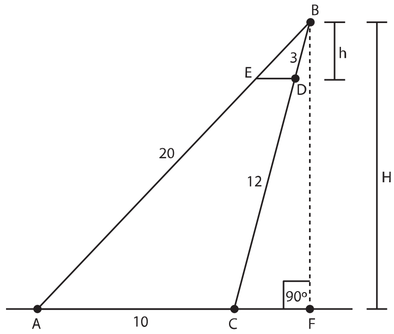
$x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 4 = 0$

$x = \dfrac{-(-3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{2}$

Portanto, a maior medida possível do segmento PB é $\dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}$.

**10.19.**




a) Da semelhança dos triângulos ABC e EBD, temos:

$\dfrac{H}{h} = \dfrac{15}{3} = 5$

b) Nos triângulos retângulos CBF e ABF, temos:

$CF = x$

- $15^2 = x^2 + H^2 \Rightarrow x^2 + H^2 = 225$
- $20^2 = (10 + x)^2 + H^2$

$400 = 100 + 20x + x^2 + H^2$

$400 = 100 + 20x + 225 \Rightarrow x = \dfrac{75}{20} = \dfrac{15}{4}$

$x^2 + H^2 = 225$

$H^2 = 225 - \left(\dfrac{15}{4}\right)^2$

$H^2 = 225 - \dfrac{225}{16}$

$H^2 = \dfrac{15 \cdot 225}{16} \Rightarrow H = \dfrac{15\sqrt{15}}{4}$

**10.20.**

Sejam **L** e **A**, respectivamente, a largura e a altura da tela de TV e **k** uma constante de proporcionalidade. Assim:

$\dfrac{L}{16} = \dfrac{A}{9} = k$

$L = 16k$ e $A = 9k$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela largura, pela altura e pela diagonal da TV, temos:

$L^2 + A^2 = 37^2$

$(16k)^2 + (9k)^2 = 37^2$

$256k^2 + 81k^2 = 37^2$

$337k^2 = 37^2$

$k^2 = \dfrac{37^2}{337} \Rightarrow k = \dfrac{37}{\sqrt{337}} \simeq \dfrac{37}{18{,}5} = 2$

Portanto:

$L = 16k = 16 \cdot 2 = 32$ polegadas

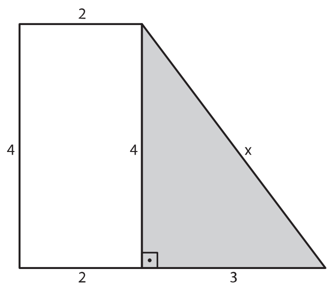
$L = 32 \cdot 2{,}5\text{ cm} = 80\text{ cm}$

$A = 9k = 9 \cdot 2 = 18$ polegadas

$A = 18 \cdot 2{,}5\text{ cm} = 45\text{ cm}$

# Aula 11

**11.01.** d




Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 3^2 + 4^2$

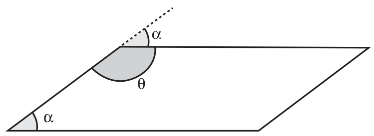
$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

Perímetro do trapézio:

$5 + 5 + 4 + 2 = 16$

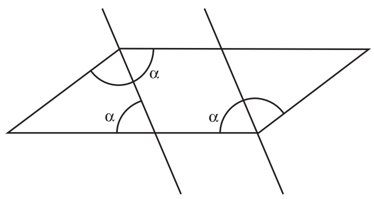
**11.02.** a

(V)




$\alpha + \theta = 180°$ (os ângulos consecutivos são suplementares)

(V) Sejam **r** e **s** as bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo.



Como os lados opostos de um paralelogramo são paralelos, as retas **r** e **s** são paralelas, pois têm a mesma inclinação.

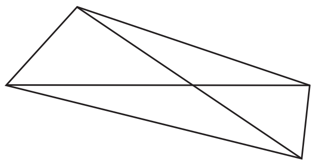
(V) Todo quadrado é um retângulo, pois tem os ângulos internos retos.

Todo quadrado é um losango, pois tem os lados congruentes.

**11.03.** d

I. FALSO

Exemplo de um quadrilátero que tem as diagonais com comprimentos iguais e não é um retângulo.



II. FALSO

Apenas os quadrados são losangos que têm as diagonais com comprimentos iguais.

III. VERDADEIRO

**11.04.** 96 $cm^2$

No triângulo retângulo AHD, temos:

$AH = \frac{AB}{2} = \frac{12\ cm}{2} = 6\ cm$

$(AD)^2 = (AH)^2 + (HD)^2$

$10^2 = 6^2 + (HD)^2 \Rightarrow HD = 8\ cm$

Área do paralelogramo:

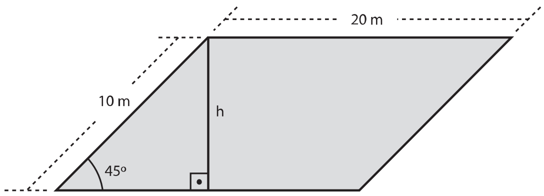
$S_{paralelogramo} = AB \cdot HD$

$S_{paralelogramo} = 12 \cdot 8$

$S_{paralelogramo} = 96\ cm^2$

**11.05.** d

Seja **h** a altura do paralelogramo.




$sen 45° = \frac{h}{10}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 5\sqrt{2} m$

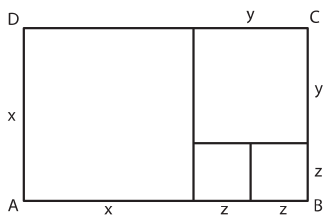
Área do paralelogramo:

$S_{paralelogramo} = 20 \cdot h$

$S_{paralelogramo} = 20 \cdot 5\sqrt{2} \simeq 100 \cdot 1{,}41$

$S_{paralelogramo} \simeq 141 m^2$

**11.06.** a

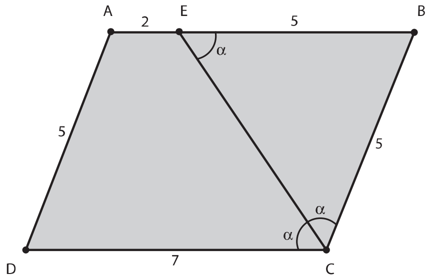



- $y = 2z$
- $x = y + z = 2z + z = 3z$

$\frac{AB}{BC} = \frac{x+y}{x} = \frac{3z+2z}{3z} = \frac{5z}{3z} = \frac{5}{3}$

**11.07.** e

Como o segmento CE é bissetriz do ângulo DCB, então os ângulos DCE e BCE são congruentes. Além disso, os ângulos BEC e DCE são congruentes, pois são alternos internos. Assim, o triângulo BCE é isósceles, com BC = BE.




Portanto, o perímetro do paralelogramo é:

7 + 5 + 7 + 5 = 24

**11.08.** c

Área total do terreno:

$S_{terreno} = 40 \cdot 20$

$S_{terreno} = 800\ m^2$

Sendo **x** a área interna da casa, em $m^2$, temos:

- $x + 200 > \frac{800}{2} \Rightarrow x > 200$
- $1500x < 450000 \Rightarrow x < 300$

Portanto, a área interna da casa será maior que 200 $m^2$ e menor que 300 $m^2$.

**11.09.** c

Medida dos lados do quadrado maior, em centímetros:

$x + 2$

Medida dos lados do quadrado menor, em centímetros:

$x + 2 - 4 = x - 2$

Assim:

$(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 83$

$x^2 - 4x + 4 + x^2 + x^2 + 4x + 4 = 83$

$3x^2 = 75$

$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5\ cm$

Área do quadrado maior:

$A = (x+2)^2$

$A = (5+2)^2$

$A = 49\ cm^2$

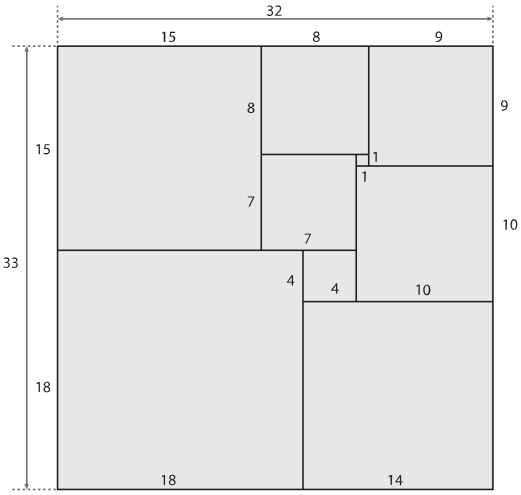
**11.10.** d

Sejam **x** e **y** as medidas dos lados do quadrado preto e do quadrado cinza. Assim:

$x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$

$y^2 = 64 \Rightarrow y = 8$

Com os valores de x e y podemos obter as medidas dos lados de todos os quadrados.




Portanto:

$S_{ABCD} = 33 \cdot 32$

$S_{ABCD} = 1056$ unidades de área

**11.11.** b

Sendo **x** o comprimento original da peça, temos:

$100\% - 4\% = 96\%$

$100\% - 8\% = 92\%$

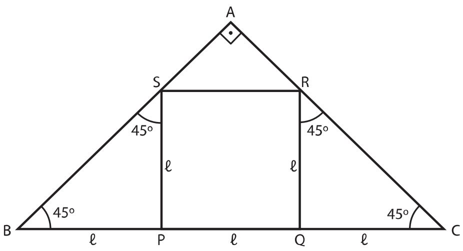
$\frac{96}{100} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{92}{100} \cdot x = 10$

$x \simeq 7{,}55$

Aproximando a resposta para o inteiro mais próximo, temos que Marta deve comprar 8 metros de tecido.

**11.12.** b

Em um triângulo retângulo isósceles, os ângulos agudos medem 45°. Consequentemente, os triângulos BPS e CQR também são retângulos e isósceles. Sendo $\ell$ a medida dos lados do quadrado, temos:




Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$(3\ell)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$\left(3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = (AB)^2 + (AB)^2$

$2 \cdot (AB)^2 = 8$

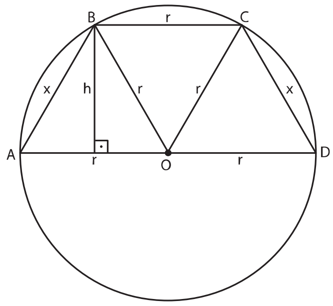
$(AB)^2 = 4 \Rightarrow AB = 2$

**11.13.** 30 (02, 04, 08, 16)

01) INCORRETO

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.

02) CORRETO




O triângulo OBC é equilátero, em que os lados medem **r**. Consequentemente, os triângulo OAB e ODC também são equiláteros.

Assim:

$x = r$

$\text{Perímetro} = x + r + x + 2r$

$\text{Perímetro} = r + r + r + 2r = 5r$

04) CORRETO

A área do trapézio é a soma das áreas de três triângulos equiláteros cujos lados medem **r**.

$S_{trapézio} = 3 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

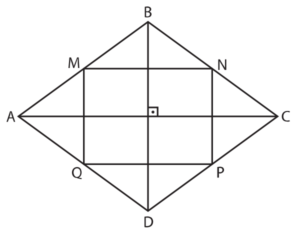
08) CORRETO

Os lados AB, BC e CD do trapézio medem **r**.

16) CORRETO

Os ângulos internos do trapézio com vértices em A e D medem 60°, ou seja, $\frac{\pi}{3}$ radianos.

**11.14.** b




Os segmentos MN e PQ são bases médias dos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Assim, são paralelas e medem a metade da diagonal AC.

Os segmentos NP e QM são bases médias dos triângulos BCD e BAD, respectivamente. Assim, são paralelas e medem a metade da diagonal BD.

Além disso, como as diagonais do losango são perpendiculares entre si, os ângulos internos do quadrilátero MNPQ são retos.

Como ABCD não é um quadrado, pois um dos seus ângulos internos é agudo, as diagonais AC e BD têm medidas distintas.

Portanto, o quadrilátero MNPQ é um retângulo, mas não é um quadrado, ou seja, não é um losango.

**11.15.** e

Se $\alpha = 60°$, o losango ABCD é formado por dois triângulos equiláteros. Sendo **L** a medida dos lados desse losango, temos:

$BD = L \Rightarrow NP = QM = \frac{L}{2}$

$AC = 2 \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = L\sqrt{3} \Rightarrow MN = PQ = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

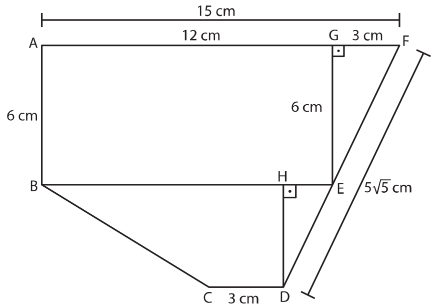
$\frac{\text{Perímetro(ABCD)}}{\text{Perímetro(MNPQ)}} = \frac{AB + BC + CD + DA}{MN + NP + PQ + QM}$

$\frac{\text{Perímetro(ABCD)}}{\text{Perímetro(MNPQ)}} = \frac{L + L + L + L}{\frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{L}{2}}$

$$\frac{\text{Perímetro(ABCD)}}{\text{Perímetro(MNPQ)}} = \frac{4L}{L \cdot (\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{\text{Perímetro(ABCD)}}{\text{Perímetro(MNPQ)}} = \frac{4}{(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3}-1)}{3-1} = 2\sqrt{3}-2$$

**11.16.** e




$(EF)^2 = 6^2 + 3^2$

$(EF)^2 = 45 \Rightarrow EF = 3\sqrt{5}$ cm

$DE = 5\sqrt{5}\text{ cm} - 3\sqrt{5}\text{ cm} = 2\sqrt{5}$ cm

Da semelhança dos triângulos FGE e EHD, temos:

$\frac{6}{HD} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow HD = 4$ cm

Como a escala é de 1:200000, temos:

$AF = 15\text{ cm} \cdot 200000 = 30$ km

$BE = 12\text{ cm} \cdot 200000 = 24$ km

$CD = 3\text{ cm} \cdot 200000 = 6$ km

$GE = 6\text{ cm} \cdot 200000 = 12$ km

$HD = 4\text{ cm} \cdot 200000 = 8$ km

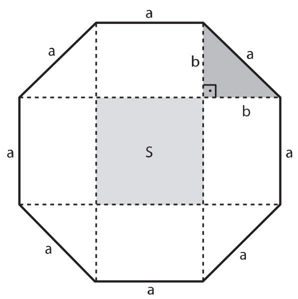
Área da APP:

$S_{APP} = \left(\frac{30+24}{2}\right) \cdot 12 + \left(\frac{24+6}{2}\right) \cdot 8$

$S_{APP} = 324 + 120$

$S_{APP} = 444\text{ km}^2$

**11.17.** c




$a^2 = b^2 + b^2$

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Área do octógono:

$S_{octógono} = a^2 + 4 \cdot a \cdot b + 4 \cdot \frac{b \cdot b}{2}$

$S_{octógono} = a^2 + 4ab + 2b^2$

$S_{octógono} = a^2 + 4a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2}$

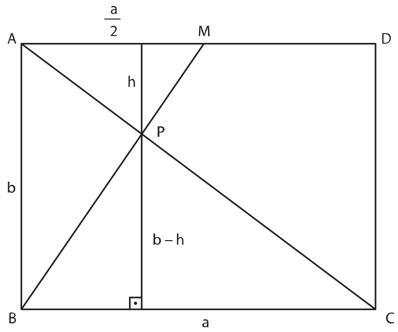
$S_{octógono} = 2a^2 + 2\sqrt{2}a^2 = 2a^2 \cdot (1+\sqrt{2})$

Como $S = a^2$, temos:

$S_{octógono} = 2S \cdot (1+\sqrt{2})$

**11.18.** e

Sejam **a** e **b** as dimensões do retângulo ABCD.




Da semelhança dos triângulos AMP e CBP, temos:

$\frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{h}{b-h} \Rightarrow b-h = 2h \Rightarrow h = \frac{b}{3}$

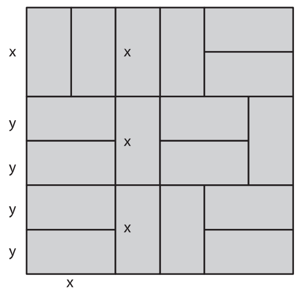
Como a área do retângulo ABCD é **S**, temos:

$S = a \cdot b$

$S_{APM} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3}}{2} = \frac{a \cdot b}{12} = \frac{S}{12}$

**11.19.** $2\sqrt{3}$ cm

Sejam **x** e **y** as dimensões de cada retângulo.




Assim:

$\begin{cases} 3x = x + 4y \\ 18 \cdot x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ xy = \frac{2}{3} \end{cases}$

$xy = \frac{2}{3} \Rightarrow x \cdot \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm

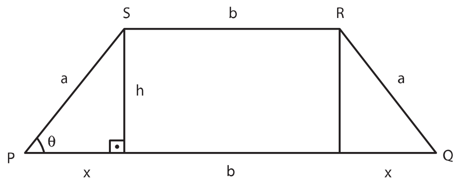
$y = \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

Perímetro de cada retângulo:

$2x + 2y = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3}$ cm

**11.20.**

a) Observe a figura:




$$\begin{cases} 2x+b=100 \\ 2x+2a+2b=250 \\ \cos 60° = \dfrac{x}{a} \end{cases}$$

- $\cos 60° = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow a = 2x$
- $2x+b=100 \Rightarrow a+b=100 \Rightarrow b=100-a$
- $2x+2a+2b=250 \Rightarrow a+2a+2\cdot(100-a)=250 \Rightarrow a=50\,m$

$b=100-a$

$b=100-50$

$b=50\,m$

b) $\begin{cases} 2x+b=100 \\ 2x+2a+2b=250 \\ a^2=x^2+h^2 \end{cases}$

Subtraímos a primeira equação da segunda.

$2a+b=150 \Rightarrow b=150-2a$

Assim:

- $2x+b=100$

  $2x+150-2a=100 \Rightarrow x=a-25$
- $a^2=x^2+h^2$

  $a^2=(a-25)^2+h^2$

  $a^2=a^2-50a+625+h^2$

  $h^2=25\cdot(2a-25) \Rightarrow h=5\cdot\sqrt{2a-25}$

Área do trapézio:

$S_{trapézio}=\left(\dfrac{100+b}{2}\right)\cdot h$

$S_{trapézio}=\left(\dfrac{100+150-2a}{2}\right)\cdot 5\cdot\sqrt{2a-25}$

$S_{trapézio}=5\cdot(125-a)\cdot\sqrt{2a-25}$

## Aula 12

**12.01.** V – F – F – V

(V)

$C=2\pi R$

$C=2\pi\cdot 10$

$C=20\pi\text{ cm}$

(F)

$2R=12 \Rightarrow R=6\text{ cm}$

$S=\pi R^2$

$S=\pi\cdot 6^2$

$S=36\pi\text{ cm}^2$

(F)

$C=2\pi R$

$50=2\pi R \Rightarrow R=\dfrac{25}{\pi}\text{ cm}$

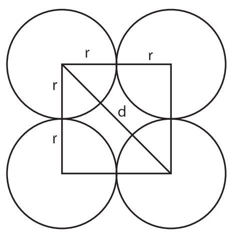
(V)

$S=\pi R^2$

$36\pi=\pi R^2$

$R^2=36 \Rightarrow R=6\text{ cm}$

**12.02.** d




A distância entre os centros de dois círculos não tangentes é a medida de uma diagonal de um quadrado de lados 2r.

Assim:

$d=2r\sqrt{2}$

**12.03.** c

| comprimento | área |
|---|---|
| $2\pi R$ | $\pi R^2$ |
| R | S |

$\dfrac{2\pi R}{R}=\dfrac{\pi R^2}{S} \Rightarrow S=\dfrac{R^2}{2}$

**12.04.** c

$\dfrac{\pi}{4}\text{ radianos}=45°$

| ângulo | comprimento |
|---|---|
| 360° | $2\pi\cdot 2$ |
| 45° | L |

$\dfrac{360}{45}=\dfrac{4\pi}{L} \Rightarrow L=\dfrac{\pi}{2}$

**12.05.** e

Área da praça circular com raio 40 m:

$S_{praça}=\pi\cdot 40^2$

$S_{praça}=1600\cdot 3{,}14$

$S_{praça}=5024\text{ m}^2$

Área de 20 pisos quadrados de lado 20 cm:

$20\text{ cm}=0{,}2\text{ m}$

$S_{20\,pisos}=(0{,}2)^2$

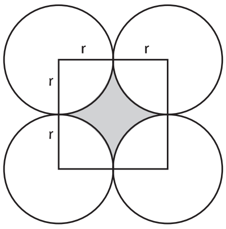
$S_{20\,pisos}=20\cdot 0{,}04=0{,}8\text{ m}^2$

Assim, sendo **n** o número de caixas, temos:

$n=\dfrac{5024}{0{,}8}=6280$

**12.06.** d

Seja **r** o raio de cada círculo.



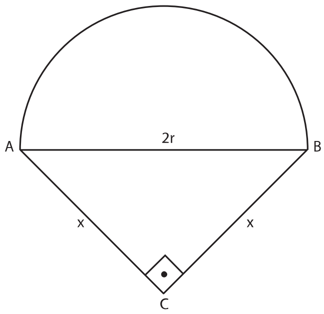

A área da região sombreada é a diferença entre a área de um quadrado de lado 2r e a área de um círculo de raio **r**.

$$\frac{S_{círculo}}{S_{sombreada}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2r)^2 - \pi \cdot r^2} = \frac{\pi}{4-\pi}$$

**12.07.** a

Como $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radianos $= 90°$, o triângulo ABC é retângulo.

Sejam **r** o raio do semicírculo e **x** a medida dos lados congruentes do triângulo retângulo isósceles ABC.

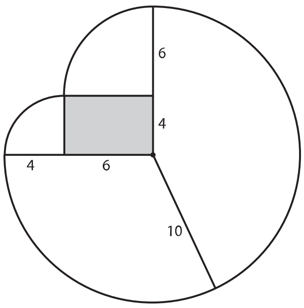



$$(2r)^2 = x^2 + x^2$$

$$4r^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2$$

$$\frac{S(\varphi)}{T(\varphi)} = \frac{\frac{\pi \cdot r^2}{2}}{\frac{x \cdot x}{2}} = \frac{\pi \cdot r^2}{x^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{2r^2} = \frac{\pi}{2}$$

**12.08.** b




A área em que o animal pode se deslocar corresponde a três quartos da área de um círculo de raio 10 metros, um quarto de um círculo de raio 6 metros e um quarto de um círculo de raio 4 metros. Assim:

$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 + \frac{\pi \cdot 6^2}{4} + \frac{\pi \cdot 4^2}{4}$$

$$S = 75\pi + 9\pi + 4\pi$$

$$S = 88\pi \text{ m}^2$$

**12.09.** b

$40 \text{ km} \cdot 1{,}25 = 50 \text{ km}$

O raio da região circular em que os voos foram cancelados é 50 km. Assim:

$$S = \pi \cdot 50^2$$

$$S \simeq 3{,}14 \cdot 2500 = 7850 \text{ km}^2$$

Portanto, a área da região que deixou de receber voos é menor que 8000 km$^2$.

**12.10.** c

A área sombreada é a diferença entre a área de um quarto de um círculo de raio **x** e a metade de um círculo de raio $\frac{x}{2}$.

$$S_{sombreada} = \frac{\pi \cdot x^2}{4} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$$

$$S_{sombreada} = \frac{\pi \cdot x^2}{4} - \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

**12.11.** 11 (01, 02, 08)

01) CORRETO

De 1 hora até 1 hora e 40 minutos, o ponteiro das horas descreve um arco de $\frac{40}{60} \cdot 30° = 20°$. Portanto, o menor ângulo entre os ponteiros é $5 \cdot 30° + 20° = 170°$.

02) CORRETO

Em um minuto, o trem desloca-se 1 km, ou seja, 1000 metros. Assim:

| arco (radianos) | comprimento (metros) |
|---|---|
| $2\pi$ | $2\pi \cdot 500$ |
| $\alpha$ | 1000 |

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{1000\pi}{1000} \Rightarrow \alpha = 2$$

04) INCORRETO

| arco (graus) | comprimento (metros) |
|---|---|
| 160 | 120 |
| 360 | $2\pi R$ |

$$\frac{160}{360} = \frac{120}{2\pi R} \Rightarrow R = \frac{135}{\pi}$$

O diâmetro da praça é $2 \cdot \frac{135}{\pi} \simeq \frac{270}{3{,}14} \simeq 86 \text{ m}$

08) CORRETO

Em 60 minutos, o ponteiro dos minutos percorre um arco de $2\pi$ rad. Assim, em 50 minutos, temos:

$$\frac{50}{60} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

**12.12.** b

Sejam **R** e **r**, respectivamente, o raio da engrenagem maior e o raio da engrenagem menor.

Assim:

$$\begin{cases} R + r = 11 \\ 1000 \cdot 2\pi \cdot r = 375 \cdot 2\pi \cdot R \end{cases}$$

$$\begin{cases} R + r = 11 \\ 40 \cdot r = 15 \cdot R \end{cases}$$

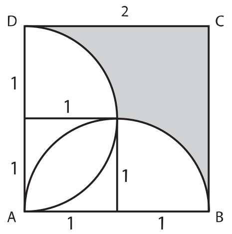
$$R + r = 11 \Rightarrow R = 11 - r$$

$$40 \cdot r = 15 \cdot R$$

$$40r = 15 \cdot (11 - r)$$

$$40r = 165 - 15r \Rightarrow 55r = 165 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

**12.13.** e




A área sombreada é a área de um quadrado de lado 2, menos a área de um quadrado de lado 1, menos metade da área de um círculo de raio 1 (dois quartos de círculo).

$$S_{\text{sombreada}} = 2^2 - 1^2 - \frac{\pi \cdot 1^2}{2}$$

$$S_{\text{sombreada}} = 4 - 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$S_{\text{sombreada}} = 3 - \frac{\pi}{2}$$

**12.14.** b

Seja **M** o ponto médio do segmento DC.
Assim:

$$DC = EC - ED = 4{,}5 - 2 = 2{,}5$$

$$DM = \frac{DC}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$$

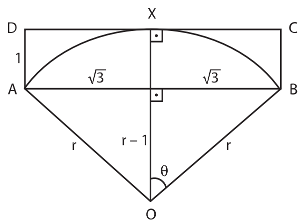
$$AO = EM = ED + DM = 2 + 1{,}25 = 3{,}25$$

$$BO = AO - AB = 3{,}25 - 1{,}6 = 1{,}65$$

Portanto, o diâmetro do círculo é $2 \cdot 1{,}65\ \text{cm} = 3{,}3\ \text{cm}$ .

**12.15.** c

Sendo r o raio do setor circular, temos:




$$r^2 = (r-1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$r^2 = r^2 - 2r + 1 + 3$$

$$2r = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

Assim, o ângulo do setor circular OAB é 120°.
Área do setor:

$$S_{OAB} = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{4\pi}{3}$$

**12.16.** F – F – V – F – V

0. FALSO

Seja **L** a medida dos lados do quadrado ABCD.

$$L\sqrt{2} = \ell \Rightarrow L = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ABCD} = L^2 = \left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2}$$

1. FALSO

A área das 4 lúnulas é quatro vezes a área de um círculo cujo raio é a metade do lado do quadrado, mais a área do quadrado, menos a área do círculo.
Assim:

$$S_{\text{lúnulas}} = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2 - \pi \cdot \ell^2$$

$$S_{\text{lúnulas}} = 4 \cdot \pi \cdot \frac{L^2}{2} + L^2 - \pi \cdot \ell^2$$

$$S_{\text{lúnulas}} = 2\pi \cdot \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{2} - \pi \cdot \ell^2$$

$$S_{\text{lúnulas}} = \frac{\ell^2}{2}$$

2. VERDADEIRO

$$S_{ABCD} = S_{\text{lúnulas}} = \frac{\ell^2}{2}$$

3. FALSO

Área de uma lúnula:

$$S_{\text{umalúnula}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell^2}{8}$$

4. VERDADEIRO

Ver afirmação anterior.

**12.17.** 2826 $cm^2$

$$S = \frac{135}{360} \cdot \left(\pi \cdot 50^2 - \pi \cdot 10^2\right)$$

$$S = \frac{3}{8} \cdot (2500\pi - 100\pi)$$

$$S = \frac{3}{8} \cdot 2400\pi$$

$$S = 900\pi \simeq 900 \cdot 3{,}14 = 2826\ \text{cm}^2$$

**12.18.** d

Nos trechos retos todos os atletas percorrem a mesma distância. A diferença na largada é devido aos dois trechos semicirculares, equivalente a um trecho circular.
Como a diferença entre os raios é de 8 metros, o atleta da raia 1 percorre $2\pi \cdot 36{,}7 = 73{,}4\pi$ metros, enquanto o atleta da raia 8 percorre $2\pi \cdot 44{,}7 = 89{,}4\pi$ , ou seja, $16\pi$ metros a mais.
Assim:

$$16\pi = 16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24 \text{ metros}$$

**12.19.**

a) $S_{AEF} = \dfrac{AE \cdot AF}{2}$

$$S_{AEF} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) A área da região hachurada é a quarta parte da diferença entre a área do quadrado de lado 2 e a área do círculo de raio 1.

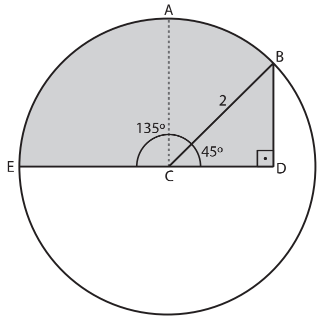
$$S_{\text{hachurada}} = \frac{2^2 - \pi \cdot 1^2}{4} = \frac{4 - \pi}{4}$$

A área da outra região é a área do triângulo AEF menos a área hachurada.

$$S = \frac{1}{2} - \left(\frac{4 - \pi}{4}\right)$$

$$S = \frac{2 - 4 + \pi}{4} = \frac{\pi - 2}{4}$$

**12.20.**




a) No triângulo retângulo BCD, temos:

$$\text{sen}45° = \frac{BD}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{2}$$

b) A área sombreada da figura é a soma da área de um setor circular de 135° e da área do triângulo retângulo isósceles BCD.

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{135}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{3\pi}{2} + 1$$

# Anotações