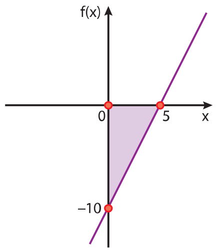
Aula 07

07.01. a

Se $f(x) = 2x - 10$, então:

- $x = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = 2 \cdot 0 - 10 = -10$
- $f(x) = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 10 \Rightarrow x = 5$



Portanto, os vértices do triângulo, que o gráfico da função $f(x) = 2x - 10$ forma com os eixos coordenados, são os pontos $(0, 0)$, $(5, 0)$ e $(0, -10)$.

07.02. c

Trata-se de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 u.c. ou 10 u.c. (observe a figura da questão anterior).

Assim, temos que:

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ u.a.}$$

07.03. e

O valor de **y** duplica, quando duplica o valor de **x**, se, na lei de formação da função afim, o termo independente de **x** for nulo, ou seja, se a lei de formação for do tipo $y = a \cdot x$, sendo **a** um número real diferente de zero, pois $a \cdot (2x) = 2 \cdot (a \cdot x)$.

Dentre as alternativas apresentadas, a única do tipo $y = a \cdot x$, com $a \neq 0$, é $y = 5x$.

07.04. c

A reta é decrescente e $y = 0$ quando $x = 1$. Portanto,

I. os valores de **y** diminuem à medida que os de **x** aumentam e, por isso, $y < 0 \Leftrightarrow x > 1$;

II. os valores de **y** aumentam à medida que os de **x** diminuem e, por isso, $y > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

a) INCORRETO.
Para $x > 1$, tem-se $y < 0$

b) INCORRETO.
Para $x \geq 1$, tem-se $y \leq 0$

c) CORRETO.
De **II**, segue que: $y > 0$ quando $x < 1$

d) INCORRETO.
$f(0{,}09) > 0$, pois $x = 0{,}09 < 1 \Rightarrow y > 0$

e) INCORRETO.
$f(-10) > 0$, pois $x = -10 < 1$

07.05. c

$\text{Salário} = 800 + 4\% \text{ das Vendas} \Rightarrow S = 800 + 0{,}04 \cdot V$

07.06. d

Considerando que cada um utilize **x** metros de fio,

- o Sr. José cobra $J(x) = 4{,}5x$ reais.
- o valor **L(x)** cobrado pelo Sr. Luiz, em reais, é tal que $L(x) = ax + b$, onde **b** indica o valor cobrado pelo orçamento (parte fixa) e **a** indica quanto ele cobra por metro de fio instalado.
  De acordo com o gráfico, temos que $L(15) = 80$ e $L(25) = 100$.
  Substituindo esses valores em $L(x) = ax + b$, obtemos o sistema $\begin{cases} 15a + b = 80 \\ 25a + b = 100 \end{cases}$, donde segue que $a = 2$ e $b = 50$. Portanto, o Sr. Luiz cobra $L(x) = 2x + 50$ reais, sendo 50 reais o valor da parte fixa.

a) INCORRETO.
$50 < 60$

b) INCORRETO.
O Sr. Cobra R$ 2,00 por metro de fio instalado.

c) INCORRETO.
Por metro de fio instalado, o Sr. José cobra mais do que o Sr. Luiz. Logo, a partir de algum valor de **x** não será vantajoso contratar o Sr. José. De fato:
$J(x) > L(x) \Leftrightarrow 4{,}5x > 2x + 50 \Leftrightarrow x > 20$

d) CORRETO.
$J(20) = L(20) = 90$ reais.

07.07. a

Considerando que a distância de Belo Horizonte até Inhotim é igual a **x** km, a distância total percorrida (ida e volta) é igual a $2 \cdot (90 + x)$ km. Então:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 80) + 0{,}75 \cdot (2 \cdot (90 + x)) &= 385 \\ 160 + 1{,}5 \cdot (90 + x) &= 385 \\ 1{,}5 \cdot (90 + x) &= 225 \\ 90 + x &= 150 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

07.08. b

Supondo que A(x) e B(x) indicam os valores cobrados pelas empresas **A** e **B**, respectivamente, passados **x** meses de manutenção, temos:

$$\begin{aligned} B(x) &< A(x) \\ 120 + 12x &< 80 + 20x \\ 40 &< 8x \\ 5 &< x \Rightarrow x > 5 \end{aligned}$$

A empresa **B** será mais vantajosa que a **A** a partir do 5º mês.

07.09. d

$$\begin{aligned} V_A(t) &= V_B(t) \\ 200 + 3t &= 5000 - 3t \\ 6t &= 4800 \\ t &= 800 \text{ minutos} \end{aligned}$$

07.10. d

Lembre que o volume de 1 m^3 equivale a 1000 litros.

O gráfico (parte representada) é um segmento de reta. Logo, a variação do volume é proporcional à variação de tempo. Portanto:

$$\frac{1m^3 - 0}{3h - 0} = \frac{2500 \text{ litros}}{t - 0}$$

$$\frac{1000 \text{ litros}}{3h} = \frac{2500 \text{ litros}}{t} \Rightarrow t = 7{,}5\,h = 7\,h\,30\,min$$

07.11. a

$y = mx + n \Rightarrow m =$ taxa de variação média

Considerando que (1; 6) e (3; 2) são pontos do gráfico da função, temos:

$$\begin{cases} m \cdot 1 + n = 6 \\ m \cdot 3 + n = 2 \end{cases} \Rightarrow m = -2$$

Outra forma:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-6}{3-1} = -2$$

07.12. d

$$\begin{aligned} \text{Receita} - \text{Custo} &= \text{Lucro} \\ (45 \cdot x) - (5000 + 25 \cdot x) &= 4000 \\ 45x - 5000 - 25x &= 4000 \\ 20x &= 9000 \\ x &= 450 \end{aligned}$$

07.13. a

As soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$ são soluções do sistema $\begin{cases} -x+3>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$ ou do sistema $\begin{cases} -x+3<0 \\ 2x-1<0 \end{cases}$, pois o numerador e o denominador da fração $\frac{-x+3}{2x-1}$ têm que ser ambos positivos ou ambos negativos.

- $\begin{cases} -x+3>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>0{,}5 \end{cases} \Rightarrow 0{,}5 < x < 3$
- $\begin{cases} -x+3<0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<0{,}5 \end{cases} \Rightarrow$ esse sistema não admite solução.
- $\begin{cases} 0{,}5<x<3 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$.
- Soma das soluções = 1 + 2 = 3

07.14. d

Se, e somente se, $(3x-25) \geq 0$ e $(5-2x) \geq 0$, ou $(3x-25) \leq 0$ e $(5-2x) \leq 0$, então $(3x-25)(5-2x) \geq 0$.

- $\begin{cases} 3x-25 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{25}{3} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$ esse sistema não admite solução.
- $\begin{cases} 3x-25 \leq 0 \\ 5-2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{25}{3} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{25}{3}$
- $\begin{cases} \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{25}{3} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = 3, 4, 5, 6, 7$ ou 8.
- A inequação $(3x-25)(5-2x) \geq 0$ admite 6 soluções inteiras.

07.15. a

$$\begin{aligned} R &= R_0(1+kT) \\ 0 &= R_0(1-273k) \\ 0 &= 1-273k \text{ (pois } R_0 > 0) \\ k &= \frac{1}{273} \end{aligned}$$

07.16. b

$$x-1 < 3x-5 < 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} x-1<3x-5 \\ 3x-5<2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<6 \end{cases} \Rightarrow 2<x<6$$

$2 < x < 6 \Rightarrow x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$ são as 3 soluções inteiras da inequação.

07.17. b

Considerando que a temperatura siga a tendência de aumento linear observada entre 1995 e 2010, e que em 2012 deverá ser igual a **T**, temos:

$$\frac{T - 13{,}8}{2012 - 2010} = \frac{13{,}8 - 13{,}35}{2010 - 1995}$$

$$\frac{T-13{,}8}{2} = \frac{0{,}45}{15} \Rightarrow T = 13{,}86\ °C$$

07.18. d

$$\begin{cases} 5n+25>5500 \\ -8n+3501>210-5n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n>1905 \\ n<1907 \end{cases} \Rightarrow 1905<n<1907$$

Se **n** representa o número de foguetes, então **n** é um número natural.

$$\begin{cases} 1905<n<1907 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow n = 1906$$

07.19. a) Preço = (Valor fixo) + (R$ 0,80 por quilômetro rodado)

$P(x) = (3{,}20) + (0{,}8 \cdot x)$

$P = 3{,}20 + 0{,}8x$

b) $P \geq 120$

$$\begin{aligned} 0{,}8x + 3{,}20 &\geq 120 \\ 0{,}8x &\geq 116{,}80 \\ x &\geq 146 \end{aligned}$$

Para que, em uma corrida, o preço a ser cobrado não ultrapasse R$ 120,00, devem ser rodados, no máximo, 146 km.

07.20. $x_0 = 30\,h$

- $A(x) = 720 - 10x$ e $B(x) = 60 + 12x$
- $A(x_0) = B(x_0)$

$$\begin{aligned} 720 - 10 \cdot x_0 &= 60 + 12 \cdot x_0 \\ 660 &= 22 \cdot x_0 \\ x_0 &= 30\,h \end{aligned}$$

Aula 08

08.01. d

Do gráfico, temos que $y_v = 3$ e $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$

O vértice da parábola é o ponto $(3, 3)$.

08.02. a

Observando o gráfico da questão anterior, verifica-se que $y_v = 3$ e que $f(x) \leq 3$ para todo **x** do domínio da função correspondente.

Então, 3 é o valor máximo que essa função assume.

08.03. d

a) INCORRETO.
A função é quadrática e o coeficiente de x^2 é igual a 1 (e 1 > 0). Então, o gráfico da parábola tem concavidade voltada para cima.

b) INCORRETO.

$f(0) = 0^2 - 16 = -16$

O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -16)$.

c) INCORRETO.
A função admite um ponto de mínimo, pois a parábola correspondente tem concavidade voltada para cima.

d) CORRETO.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4.$

e) INCORRETO.

$f(x) = 0$ se $x = 4$ ou $x = -4.$

08.04. d

$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)} = 20$

08.05. b

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4 \cdot 2} = -\frac{9}{8}$

08.06. b

Se o ponto $(-1, 2)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = k \cdot x \cdot (x+3)$, então:

$f(-1) = 2 \Rightarrow k \cdot (-1) \cdot (-1+3) = 2 \Rightarrow -2k = 2 \Rightarrow k = -1$

08.07. a

$y = -4x^2 + 24x$

$\Delta = 24^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 24^2$

$h_{máximo} = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24^2}{4 \cdot (-4)} = 36 \text{ m}$

08.08. e

- $p \cdot x = \text{receita}$

  $(600 - 10x) \cdot x = 5000$

  $600x - 10x^2 = 5000$

  $x^2 - 60x + 500 = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 50$

- $\begin{cases} x = 10 \Rightarrow p = 600 - 10 \cdot 10 = 500 \\ x = 50 \Rightarrow p = 600 - 10 \cdot 50 = 100 \end{cases}$

- Soma dos preços $= 500 + 100 = 600$ reais

08.09. b

O ponto de mínimo de uma função quadrática é o vértice da parábola correspondente. Portanto, nesse ponto de mínimo:

$x = x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$

08.10. a

$y = 4x^2 + 4x + 1$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$

$y_v = 4 \cdot (x_v)^2 + 4 \cdot x_v + 1 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

A parábola tem vértice no ponto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

08.11. d

$f(x) = -x^2 + x + 12$

A imagem dessa função é máxima quando:

$x = x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2} = 0,5$

a) INCORRETO. $0,5 \notin [-3, -2]$

b) INCORRETO. $0,5 \notin [-2, -1]$

c) INCORRETO. $0,5 \notin [-1, 0]$

d) CORRETO. $0,5 \in [0, 1]$

e) INCORRETO. $0,5 \notin [1, 2]$

08.12. c

$\text{Vértice} = (k, 9) \Rightarrow \begin{cases} x_v = k \\ y_v = 9 \end{cases}$

$y = 6x^2 + bx + 15$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15 = b^2 - 360$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

$9 = -\frac{b^2 - 360}{4 \cdot 6}$

$9 = -\frac{b^2 - 360}{24} \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$ ou $b = -12$

A incógnita **b** pode ser igual a 12 ou a –12.
A alternativa (c) é a única que apresenta um valor possível para a incógnita **b**: 12.

08.13. e

$f(x) = ax^2 - 4x + 6$

$\text{Im}(f) = [-6, \infty[\Rightarrow y_v = -6$

$y_v = -6$

$-\frac{\Delta}{4a} = -6$

$\Delta = 24a$

$(-4)^2 - 4 \cdot a \cdot 6 = 24a$

$16 - 24a = 24a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

08.14. c

$$f(x)=g(x)$$
$$2+x^2=2+x$$
$$x^2=x \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

08.15. b

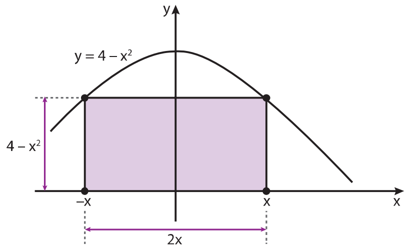
Receita = (preço unitário) · (unidades vendidas)

$$R(x)=(x)\cdot(86-2x)$$
$$R(x)=-2x^2+86x$$

$$\text{Receita máxima}=\text{"}y_v\text{"} \Rightarrow x=x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{86}{2\cdot(-2)}=21{,}5$$

A receita será máxima quando o preço unitário for igual a R$ 21,50.

08.16. c



$$\text{perímetro}=f(x)=2\cdot(2x+(4-x^2))$$
$$f(x)=-2x^2+4x+8$$

$$\text{perímetro máximo}=f(x)_{\text{máximo}}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4^2-4\cdot(-2)\cdot 8}{4\cdot(-2)}=10 \text{ u.c.}$$

08.17. d

Considerando que as duas parcelas, cuja soma é igual a 10, são **x** e **10 – x**, temos:

$$\text{produto}=f(x)=x\cdot(10-x)$$
$$f(x)=-x^2+10x$$

$$\text{produto máximo}=f(x)_{\text{máximo}}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{10^2-4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)}=25$$

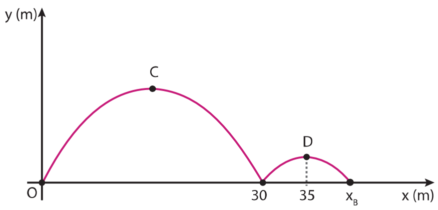
08.18. b

- $y=-\dfrac{x^2}{75}+\dfrac{2x}{5}$

$$y=0 \Rightarrow -\frac{x^2}{75}+\frac{2x}{5}=0 \Rightarrow \frac{x}{5}\cdot\left(-\frac{x}{15}+2\right)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ x=30 \end{array}\right.$$

Portanto, $y=-\dfrac{x^2}{75}+\dfrac{2x}{5}$ é a equação da parábola de vértice **C**, donde segue que $x_A=30$.

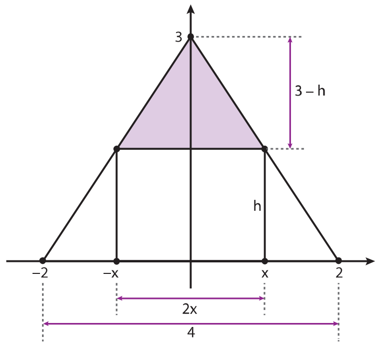
Observe a figura a seguir.



- A distância do ponto **O** ao ponto **B** é igual à distância entre as abscissas desses pontos. Portanto:
  $d_{OB}=x_B-x_O=x_B-0=x_B$
- Pela simetria da parábola:
  $x_B-35=35-30 \Rightarrow x_B=40 \Rightarrow d_{OB}=40 \text{ m}$

08.19. $x=1$

Na figura abaixo, além do triângulo destacado, considere o triângulo **T**, de vértices $(-2,\ 0), (2,\ 0)$ e $(0,\ 3)$, e o retângulo **R**, cuja altura está indicada por **h**.



O triângulo destacado, nessa figura, é semelhante ao triângulo **T**. Sendo assim, temos que:

$$\frac{3-h}{3}=\frac{2x}{4} \Rightarrow \frac{3-h}{3}=\frac{x}{2} \Rightarrow h=\frac{6-3x}{2}$$

- Área do retângulo **R**:

$$\text{Área}=2x\cdot h$$
$$\text{Área}=2x\cdot\left(\frac{6-3x}{2}\right)$$
$$\text{Área}=f(x)=-3x^2+6x$$

Para que a área seja máxima, devemos ter:

$$x=x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot(-3)}=1$$

08.20. a) Se no preço do pacote for dado um desconto de 1 real, então o lucro, por pacote vendido, passará a ser de $2-1=1$ real e o supermercado aumentará sua venda em $400\cdot 1=400$ pacotes por semana, passando a vender, então, $400+400=800$ pacotes na semana.
Nesse caso, o lucro desse supermercado, em uma semana, será igual a $800\cdot 1=800$ reais.

b) Se for dado um desconto de **x** reais, no preço do pacote, então o lucro, por pacote vendido, será igual a $(2-x)$ reais e o supermercado passará a vender $400+400x$ pacotes por semana.
Na semana considerada, teremos:

$$\text{Lucro}=(2-x)\cdot(400+400x)$$
$$\text{Lucro}=-400x^2+400x+800$$

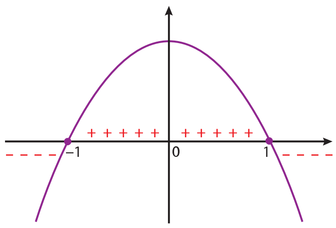
$$\text{Lucro máximo} \Rightarrow x=x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{400}{2\cdot(-400)}=0{,}5$$

Desconto = R$ 0,50

Preço do pacote = R$ 6,00 – R$0,50 = R$ 5,50

Aula 09

09.01. d



Do gráfico, temos que:

I. $y = 0$ se $x = -1$ ou se $x = 1$;

II. $y < 0$ se $x < -1$ ou se $x > 1$;

III. $y > 0$ se $-1 < x < 1$.

De **III**, é correto afirmar que $y > 0$ para todos os valores de **x** pertencentes ao intervalo $]-1,\ 1[$

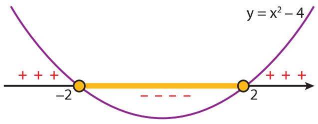
09.02. e

Observe, na questão anterior, que $y < 0$ se $x < -1$ ou se $x > 1$. Ou seja, $y > 0$ para todos os valores de **x** pertencentes ao intervalo $]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$.

09.03. a

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$

Observe a figura a seguir.



$$x^2 - 4 \le 0 \ \Rightarrow\ -2 \le x \le 2$$

09.04. e

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Do gráfico, temos que $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Então:

$f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

O ponto $(0, 3)$ pertence ao gráfico da função. Logo, $f(0) = 3$.

$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 3) = 3 \Rightarrow a = 1$

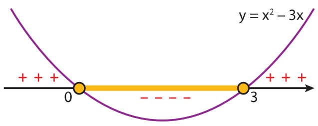
Portanto, $f(x) = (x - 1)(x - 3)$

09.05. c

Se todos os pontos do gráfico da função $f(x)$ estão acima do eixo **x**, então $f(x) > 0$ para todos os valores reais de **x**. Portanto, não existe **x** real tal que $f(x) < 0$.

09.06. e

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

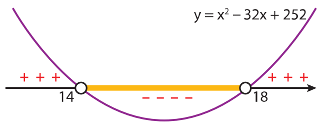


$$x^2 - 3x \le 0 \ \Rightarrow\ 0 \le x \le 3$$

Portanto, as soluções inteiras da inequação são os elementos do conjunto $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

09.07. b

$x^2 - 32x + 252 = 0 \Rightarrow x = 14$ ou $x = 18$



$$x^2 - 32x + 252 < 0 \ \Rightarrow\ 14 < x < 18$$

O único número inteiro par, pertencente a esse intervalo, é 16.

09.08. d

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Se $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$, então $f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

Mas $f(0) = 1$. Logo:

$$f(0) = a\left(0 - \frac{1}{2}\right)(0 - 1)$$

$$1 = a\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) \ \Rightarrow\ a = 2$$

Assim, segue que:

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$f(x) = (2x - 1)(x - 1) \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

09.09. c

$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 3)$

- $x \in [0,\ 5]$

  $f(0) = (0 - 1) \cdot (0 - 3) \ \Rightarrow\ f(0) = 3$

  $f(5) = (5 - 1) \cdot (5 - 3) \ \Rightarrow\ f(5) = 8$

- $f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

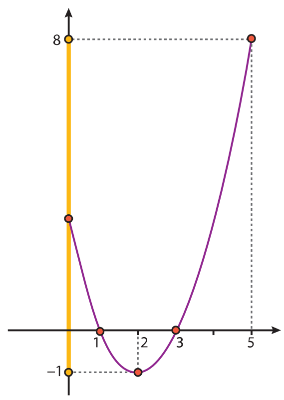
  $x_v = \frac{1 + 3}{2} \ \Rightarrow\ x_v = 2$

  $y_v = f(2) = (2 - 1).(2 - 3) \ \Rightarrow\ y_v = -1$

- Dos resultados anteriores, concluímos que

  $\text{Im}(f) = [-1,\ 8]$,

  conforme podemos verificar no gráfico esboçado a seguir.



09.10. a

$L(x) = -x^2 + 48x - 10$

$L(x)_{\text{máximo}} = \text{"}y_v\text{"}$

$L(x)_{\text{máximo}} = -\dfrac{\Delta}{4a}$

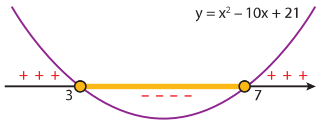
$L(x)_{\text{máximo}} = -\left(\dfrac{48^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}{4 \cdot (-1)}\right)$

$L(x)_{\text{máximo}} = 566$

$566 \times 1000 = 566000 \Rightarrow$ Lucro máximo $=$ R\$ 566000,00

09.11. c

$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 7$



$x^2 - 10x + 21 \leq 0 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7$

As soluções inteiras dessa inequação são os elementos do conjunto $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

A inequação $x^2 - 10x + 21 \leq 0$ admite exatamente 5 soluções inteiras.

09.12. d

Os pontos (0, 0), (3, 9) e (6, 0) pertencem ao gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$. Então:

- $(0,\ 0) \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

  $y = ax^2 + bx$

- $(3,\ 9) \Rightarrow 9 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 \Rightarrow 3a + b = 3$

- $(6,\ 0) \Rightarrow 0 = a \cdot 6^2 + 6 \cdot b \Rightarrow 6a + b = 0$

- $\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 6$

- $a + b + c = -1 + 6 + 0 = 5$

Outra forma:

$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- $x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 6$:

  $y = a(x - 0)(x - 6)$

  $y = a \cdot x \cdot (x - 6)$

- $x = 3 \Rightarrow y = 9$:

  $y = a \cdot x \cdot (x - 6)$

  $9 = a \cdot 3 \cdot (3 - 6) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -x \cdot (x - 6)$

- $y = -x \cdot (x - 6)$

  $y = -x^2 + 6x$

  $ax^2 + bx + c = -x^2 + 6x \Rightarrow a = -1,\ b = 6 \text{ e } c = 0.$

- $a + b + c = -1 + 6 + 0 = 5$

09.13. a

$f(x) = ax^2 + bx + c$

- Se o gráfico corta o eixo das ordenadas em $y = 25$, então $c = 25$, donde segue que

  $f(x) = ax^2 + bx + 25$

- O eixo de simetria do gráfico está na reta $x = 3$. Portanto, $x_v = 3$.

  $x_v = 3 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a$

  Substituindo **b** por $-6a$, na lei de formação da função, temos:

  $f(x) = ax^2 - 6ax + 25$

- Se a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz igual a 1, então:

  $f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 - 6a \cdot 1 + 25 = 0 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = -30$

  Assim, temos que $f(x) = 5x^2 - 30x + 25$

- $a > 0 \Rightarrow$ a parábola correspondente tem concavidade voltada para cima e, então,

  $\text{Im}(f) = [y_v,\ +\infty[$.

  $x_v = 3 \Rightarrow f(x_v) = 5 \cdot 3^2 - 30 \cdot 3 + 25 \Rightarrow y_v = -20$

Então: $\text{Im}(f) = [-20,\ +\infty[$

09.14. d

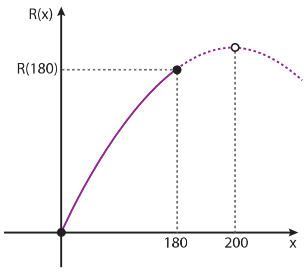
Receita $=$ (preço da passagem) $\cdot$ (número de passageiros)

$R(x) = (300 - 0{,}75x) \cdot x$

$(300 - 0{,}75x) \cdot x = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad \text{ou} \\ 300 - 0{,}75x = 0 \Rightarrow x = 400 \end{array} \right.$

$x_v = \dfrac{0 + 400}{2} = 200$

Se o avião tem apenas 180 lugares, então a receita máxima possível é obtida quando $x = 180$, conforme indicado a seguir.



Receita máxima $= R(180)$

$R(180) = (300 - 0{,}75 \cdot 180) \cdot 180$

$R(180) = 29700$

Receita máxima $=$ R\$29700,00

09.15. d

$y = -x^2 - bx + c \Rightarrow f(x) = -x^2 - bx + c$

$f(0) = k \Rightarrow -0^2 - b \cdot 0 + c = k \Rightarrow c = k$

Então: $f(x) = -x^2 - bx + k$

$k > 0 \Rightarrow -k < 0$

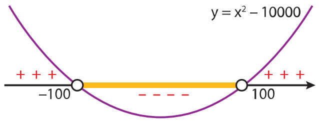
Se $x_1 = -k$, para qualquer $k > 0$, então:

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow -k \cdot x_2 = \dfrac{k}{-1} \Rightarrow x_2 = 1$

09.16. b

$x^2 < 10000 \Rightarrow x^2 - 10000 < 0$

$x^2 - 10000 = 0 \Rightarrow x = 100 \text{ ou } x = -100.$



$x^2 - 10000 < 0 \Rightarrow -100 < x < 100$

Temos então que:

$\{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 10000\} = \{-99, -98, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 99\}$

O número de elementos desse conjunto é 199.

09.17. e

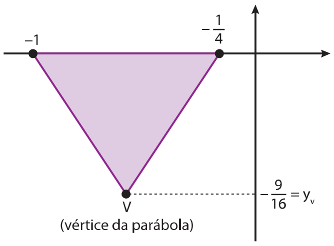
$f(x) = 4x^2 + 5x + 1$

$4x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{4} \text{ ou } x = -1$

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2 \cdot 4} = -\dfrac{5}{8}$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}{4 \cdot 4} = -\dfrac{9}{16}$

Observe, na figura a seguir, o triângulo AVB.



$$\text{Área} = \frac{\left(-\frac{1}{4} - (1)\right) \cdot \left(0 - \frac{9}{16}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{9}{16}\right)}{2} = \frac{27}{128} \text{ u.a.}$$

09.18. c

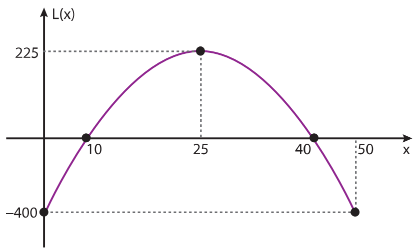
$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = (60x - x^2) - 10(x + 40)$

$L(x) = -x^2 + 50x - 400$

- $-x^2 + 50x - 400 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ \text{ou} \\ x = 40 \end{cases}$
- $x_v = \dfrac{10 + 40}{2} = 25$
- $y_v = L(x_v) = -25^2 + 50 \cdot 25 - 400 = 225$
- $0 \le x \le 50$ e $f(50) = f(0) = -400$

Com essas informações, podemos esboçar o gráfico a seguir:



Agora, vamos analisar as afirmativas.

I. CORRETO.

$L(x) \ge 0$ para $10 \le x \le 40$

II. CORRETO.

Observe, no gráfico, que se $0 \le x_1 < x_2 \le 25$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Ou seja: a função lucro L(x) é crescente no intervalo [0, 25].

III. INCORRETO.

Para que a fábrica tenha o maior lucro possível, deve produzir 25 itens por dia.

IV. CORRETO.

$f(50) = -400 \Rightarrow$ se a fábrica produzir 50 itens num único dia, terá prejuízo.

09.19. a) 2 raízes reais;

b) $m \le 4$ ou $m \ge 16$ $(m \in \mathbb{R})$

Se $\dfrac{8x - 1}{x + 1} = mx$, com $x \ne -1$, então:

$8x - 1 = (x + 1) \cdot mx$

$8x - 1 = mx^2 + mx \Rightarrow mx^2 + (m - 8)x + 1 = 0$

a) Para $m = 1$, temos:

$x^2 - 7x + 1 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 45$

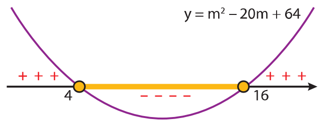
$\Delta > 0 \Rightarrow$ a equação admite 2 raízes reais.

b) A equação $mx^2 + (m - 8)x + 1 = 0$ admite ao menos uma raiz real se, e somente se, $\Delta \ge 0$. Ou seja, se:

$(m - 8)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \ge 0$

$m^2 - 20m + 64 \ge 0$

- $m^2 - 20m + 64 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 16$



$m^2 - 20m + 64 \ge 0 \Rightarrow m \le 4$ ou $m \ge 16$

09.20. 12

Se a parábola corta o eixo **x** em dois pontos, então $\Delta > 0$.

Sendo **L** a medida do lado do triângulo ABV, temos:

$L = x_B - x_A$

$L = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$L = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow L = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Indicando por **H** a medida da altura do triângulo equilátero, e observando a figura, podemos escrever:

$H = \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0 - y_v = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_v = -L \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

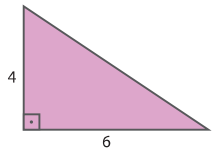
$y_v = -L \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\Delta}{2} = \sqrt{3\Delta} \Rightarrow \Delta^2 = 12\Delta$

- Se $\Delta > 0$ e $\Delta^2 = 12\Delta$, então $\Delta = 12$.

Aula 07

07.01. b

Observe a seguinte ilustração:



A área de um triângulo retângulo pode ser calculada pelo semiproduto das medidas dos catetos, ou seja:

$$S = \frac{4 \cdot 6}{2}$$

$$S = 12\ m^2$$

07.02. c

Um triângulo equilátero possui ângulos internos medindo 60°. Assim, sendo **x** metros a medida de qualquer lado, tem-se:

$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \text{sen}\,60°$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \sqrt{3}\ m^2$$

07.03. b

A área do triângulo pode ser calculada da seguinte maneira:

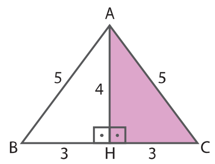
$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \text{sen}\,60°$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 18\,m^2$$

07.04. d

Observe a seguinte figura:



O ponto **H**, extremo da altura do triângulo em relação ao vértice **A**, divide ao meio o lado de extremos **B** e **C**. Desta forma, **BH = HC = 3** e **AHC** é um triângulo retângulo pitagórico. Desta forma, a área do triângulo **ABC** é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

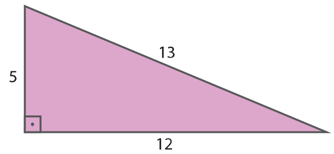
$$S_{ABC} = \frac{6 \cdot 4}{2}$$

$$S_{ABC} = 12\,cm^2$$

07.05. b

O triângulo cujos lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm, é um triângulo retângulo, pois satisfaz o teorema de Pitágoras:

$13^2 = 5^2 + 12^2$



Logo, a área pode ser calculada pelo semiproduto das medidas dos catetos, ou seja:

$$S = \frac{5 \cdot 12}{2}$$

$$S = 30\ m^2$$

07.06. a

Considerando que x e 2x são as medidas dos catetos do triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede $5\sqrt{5}$ cm, temos:

$$(5\sqrt{5})^2 = x^2 + (2x)^2$$

$$25 \cdot 5 = 5x^2 \Rightarrow x = 5\,cm \Rightarrow 2x = 10\,cm$$

A área do triângulo retângulo pode ser calculada pelo semiproduto das medidas dos catetos. Portanto:

$$S = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25\,cm^2$$

07.07. b

O triângulo **ABC** é retângulo de hipotenusa **AC**, pois **AC** é diâmetro. Utilizando Pitágoras no triângulo **ABC**, tem-se:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$10^2 = 6^2 + (BC)^2$

$(BC)^2 = 64$

$BC = 8\ cm \qquad (BC > 0)$

A área do triângulo **ABC** é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$$

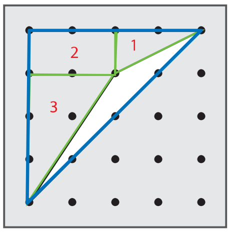
$$S_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\,cm^2$$

A medida da área do triângulo **OBC** é igual à metade da medida da área do triângulo **ABC**, pois ambos têm alturas congruentes (distância de **B** ao segmento **AC**), mas **OBC** possui base igual à metade da base de **ABC** (**AC = 2 · OC**):

$$S_{OBC} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{24}{2} = 12\,cm^2$$

07.08. a

A área do triângulo destacado na cor branca é igual à área de um triângulo retângulo isósceles de catetos medindo 4 (cor azul), subtraída da área de um retângulo da área medindo 2, de um triângulo retângulo de área medindo 1 e de um triângulo retângulo de área medindo 3.



Logo, a área do triângulo em destaque é dada por:

$$S = \frac{4 \cdot 4}{2} - 2 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$S = 8 - 2 - 1 - 3$$

$$S = 2$$

07.09. b

As figuras geométricas são equivalentes quando possuem a mesma área. Logo, se a área do paralelogramo deve ser igual à área do retângulo, deve-se ter:

$$S_p = S_r$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 \cdot \text{sen}\,\alpha = 8{,}\overline{6} \cdot 6$$

$$78 \cdot \text{sen}\,\alpha = (8 + 0{,}\overline{6}) \cdot 6$$

$$78 \cdot \text{sen}\,\alpha = \left(8 + \frac{6}{9}\right) \cdot 6$$

$$78 \cdot \text{sen}\,\alpha = \left(8 + \frac{2}{3}\right) \cdot 6$$

$$78 \cdot \text{sen}\,\alpha = \left(\frac{26}{3}\right) \cdot 6$$

$$78 \cdot \text{sen}\,\alpha = 52$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{52}{78}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$$

07.10. e

A área do triângulo **ABC** é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen}(B\hat{A}C)$$

A área do triângulo **ADE** é dada por:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \text{sen}(D\hat{A}E)$$

Os ângulos **B$\hat{\text{A}}$C** e **D$\hat{\text{A}}$E** são congruentes. Assim, a razão entre as medidas das áreas dos triângulos **ABC** e **ADE** é igual a:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen}(B\hat{A}C)}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \text{sen}(D\hat{A}E)}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{\text{sen}(B\hat{A}C)}{\text{sen}(D\hat{A}E)}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 6$$

07.11. a

Cálculo da medida do lado do triângulo equilátero **ABC**:

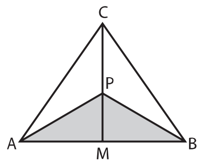
$$S = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \text{sen}\,60°$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ell^2 = 4$$

$$\ell = 2$$

Cálculo da medida da altura **MP** do lado do triângulo isósceles **APB**:



$$S_{APB} = \frac{(AB) \cdot (MP)}{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{2 \cdot (MP)}{2}$$

$$MP = \sqrt{2}$$

07.12. d

A área do triângulo retângulo é igual ao semiproduto das medidas dos catetos:

$$S = \frac{6 \cdot 8}{2}$$

$$S = 24\ \text{cm}^2$$

Utilizando Pitágoras, obtém-se a medida da hipotenusa **a**:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 6^2 + 8^2$$

$$a^2 = 100$$

$$a = 10\ \text{cm}\ (a > 0)$$

O semiperímetro do triângulo retângulo, de lados de medidas 10 cm, 6 cm e 8 cm, é dado por:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$p = \frac{10 + 6 + 8}{2}$$

$$p = 12\ \text{cm}$$

A medida do raio do círculo inscrito num triângulo retângulo é dada por:

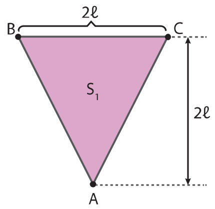
$$S = p \cdot r$$

$$24 = 12 \cdot r$$

$$r = 2\ \text{cm}$$

07.13. a

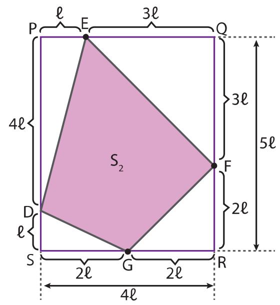
Sendo ℓ a medida do lado de cada quadrado da malha, tem-se:



A área $\mathbf{S_1}$ do triângulo **ABC** é dada por:

$$S_1 = \frac{2\ell \cdot 2\ell}{2} = 2\ell^2 \text{ u.a.}$$

A área $\mathbf{S_2}$ do quadrilátero **DEFG** é igual à área do retângulo **PQRS** subtraída das áreas dos triângulos **DGS**, **FGR**, **EFQ** e **DEP**.



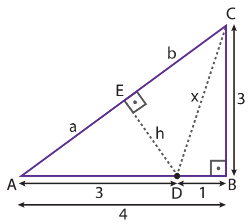
$$S_2 = 4\ell \cdot 5\ell - \frac{2\ell \cdot \ell}{2} - \frac{2\ell \cdot 2\ell}{2} - \frac{3\ell \cdot 3\ell}{2} - \frac{4\ell \cdot \ell}{2} = 10{,}5\,\ell^2$$

Portanto:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{10{,}5\ell^2}{2\ell^2} = 5{,}25$$

07.14. a

Observe a seguinte figura:



O triângulo **ABC** é pitagórico com catetos medindo 3 cm e 4 cm. Logo, **AC = 5 cm**.

Utilizando Pitágoras no triângulo **BCD**, tem-se:

$x^2 = (BD)^2 + (BC)^2$

$x^2 = 1^2 + 3^2$

$x^2 = 10$

Utilizando Pitágoras nos triângulos **ADE** e **CDE**, tem-se:

$3^2 = a^2 + h^2$ (I)

$x^2 = b^2 + h^2$ (II)

Fazendo (I) – (II), tem-se:

$9 - x^2 = a^2 - b^2$

Substituindo $\mathbf{x^2 = 10}$ e observando que $\mathbf{a = 5 - b}$, tem-se:

$9 - 10 = (5 - b)^2 - b^2$

$-1 = 25 - 10b + b^2 - b^2$

$$b = \frac{13}{5}$$

Substituindo em (II), tem-se:

$x^2 = b^2 + h^2$

$$10 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 + h^2$$

$$10 - \frac{169}{25} = h^2$$

$$\frac{81}{25} = h^2$$

$$h = \frac{9}{5} \ (h > 0)$$

A área do triângulo **CDE** é dada por:

$$S_{CDE} = \frac{CE \cdot DE}{2}$$

$$S_{CDE} = \frac{\frac{13}{5} \cdot \frac{9}{5}}{2}$$

$$S_{CDE} = \frac{117}{50} \text{ cm}^2$$

07.15. d

Cálculo do semiperímetro **p** do triângulo **ABC**:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = 12 \text{ m}$$

Cálculo da medida **S** da área do triângulo **ABC**:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$S = \sqrt{12 \cdot (12-7) \cdot (12-8) \cdot (12-9)}$$

$$S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$S = 12\sqrt{5} \text{ m}^2$$

Cálculo da medida **r** do raio da circunferência inscrita:

$S = p \cdot r$

$12\sqrt{5} = 12 \cdot r$

$r = \sqrt{5}$ m

Cálculo da medida **R** do raio da circunferência circunscrita:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$12\sqrt{5} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4R}$$

$$R = \frac{21}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

Cálculo da razão **Q** entre as áreas dos círculos circunscrito e inscrito ao triângulo:

$$Q = \frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{\frac{21\sqrt{5}}{10}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{441}{100} = 4{,}41$$

Portanto:

$4 < Q \leq 5$

07.16. F – V – V – F

1. Falsa: O triângulo **ABC** é isósceles, ou seja, **AC = BC = 12 km**.

Utilizando a lei dos cossenos, tem-se:

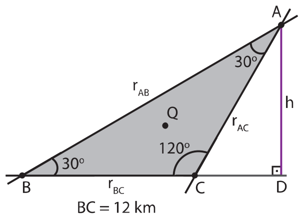
$(AB)^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 120°$

$(AB)^2 = 432$

$AB = 12\sqrt{3}$ km $(AB > 0)$

Logo, os lados da região de floresta determinados pelas estradas $\mathbf{r_{AB}}$ e $\mathbf{r_{AC}}$ medem, respectivamente, $12\sqrt{3}$ km e 12 km.

2. Verdadeira: A distância **h** entre o ponto **A** e a estrada $\mathbf{r_{BC}}$ é a medida da altura do triângulo **ABC** em relação ao vértice **A**.



Utilizando a razão trigonométrica seno, no triângulo **ABD**, tem-se:

$\operatorname{sen} 30° = \dfrac{h}{12\sqrt{3}} \rightarrow h = 6\sqrt{3}$ km.

3. Verdadeira: A área **S**, ocupada pela região de floresta, é dada por:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 120°$

$S = 36\sqrt{3}$ km^2

4. Falsa: A distância comum **r** entre o ponto de observação **O** e cada uma das estradas é igual ao raio da circunferência inscrita no triângulo. Logo:

$S = p \cdot r$ em que

$p = \dfrac{12 + 12 + 12\sqrt{3}}{2} = 12 + 6\sqrt{3}$

$36\sqrt{3} = (12 + 6\sqrt{3}) \cdot r$

$r = \dfrac{36\sqrt{3}}{12 + 6\sqrt{3}}$

$r = \dfrac{6\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ km

07.17. b

I. Verdadeira: Seja **x** a medida do ângulo oposto ao lado de medida igual a 7. Então:

$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos x$

$49 = 64 + 25 - 80 \cdot \cos x$

$80 \cdot \cos x = 40$

$\cos x = 1/2 \Rightarrow x = 60°$

Logo, um dos ângulos internos do triângulo mede 60°.

II. Falsa: Como o ângulo oposto ao lado de medida igual a 7 é igual a 60°, a área do triângulo pode ser calculada por:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \operatorname{sen} 60°$

$S = 10\sqrt{3}$

$S \cong 17{,}3$

III. Verdadeira: Seja α a medida do maior dos ângulos internos, oposto ao lado de medida 8, então:

$8^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$

$64 = 49 + 25 - 70 \cdot \cos \alpha$

$70 \cdot \cos \alpha = 10$

$\cos \alpha = 1/7$

Como $\cos \alpha > 0$, conclui-se que o maior ângulo interno do triângulo é agudo, pois $0 < \alpha < 90°$. Para ângulos α tais que $90° < \alpha < 180°$, tem-se $\cos \alpha < 0$.

Portanto, o triângulo é acutângulo.

IV. Falsa: Utilizando a lei dos senos, tem-se:

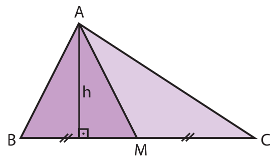
$\dfrac{5}{\operatorname{sen} \beta} = \dfrac{7}{\operatorname{sen} 60°}$

$7 \cdot \operatorname{sen} \beta = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen} \beta = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

07.18. V – V – F – F – F

00. Verdadeira. Em qualquer triângulo, uma mediana o divide em dois outros triângulos que possuem as mesmas medidas da base e da altura.

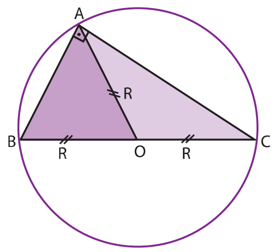


Na figura, **BM = CM** (bases congruentes) e **h** é a medida da altura tanto do triângulo **ABM**, quanto do triângulo **ACM**. Logo, os triângulos **ABM** e **ACM** são equivalentes (mesma área).

Conclusão: uma mediana divide um triângulo em dois outros equivalentes, ou seja, triângulos que possuem a mesma área.

Isto vale para qualquer triângulo, não importando se o triângulo é retângulo e escaleno.

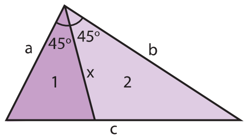
01. Verdadeira: Um triângulo retângulo é inscritível em um círculo desde que a medida da hipotenusa seja igual à medida de um diâmetro desse círculo. Consequentemente, a mediana relativa à hipotenusa vai dividir o triângulo em dois outros de modo que cada um possua dois lados iguais ao raio do círculo:



A mediana relativa à hipotenusa divide o triângulo em dois triângulos isósceles. Na figura, observa-se que **AO = OB = OC = R**.

02. Falsa: Na afirmação anterior, por exemplo, mostrou-se que a divisão da fazenda pode ser realizada por meio de uma mediana, pois a mediana de qualquer lado permite dividir o triângulo em dois triângulos equivalentes. Entretanto, mesmo equivalentes, os triângulos não são congruentes entre si.

03. Falsa: Observe o triângulo seguinte com lados de medidas **a**, **b**, **c**, e bissetriz do ângulo reto de medida **x**:



A área do triângulo 1 é dada por:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \text{sen}\, 45° = \frac{a \cdot x \cdot \sqrt{2}}{4}$$

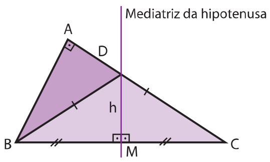
A área do triângulo 2 é dada por:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \text{sen}\, 45° = \frac{b \cdot x \cdot \sqrt{2}}{4}$$

Como o triângulo é escaleno, tem-se $a \neq b$. Logo, $S_1 \neq S_2$.

Conclusão: a bissetriz interna de um ângulo de um triângulo escaleno divide-o em dois outros triângulos não equivalentes. Para que as áreas de $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ fossem iguais, seria necessário que os lados de medidas **a** e **b** fossem congruentes, ou seja, o triângulo deveria ser isósceles.

04. Falsa: Observe o triângulo **ABC** dividido em duas partes (triângulo **CDM** e quadrilátero **ABMD**) por meio da mediatriz da hipotenusa que passa pelos pontos **M** e **D**:



Os triângulos **BDM** e **CDM** são congruentes, pois possuem a mesma altura, **DM**, e bases congruentes (**BM = CM**). Logo, necessariamente, o quadrilátero ABMD terá uma medida de área maior do que a área do triângulo **CDM**.

Conclusão: a mediatriz da hipotenusa de um triângulo retângulo escaleno divide o triângulo inicial em duas figuras (um triângulo e um quadrilátero) de áreas com medidas distintas.

Caso o triângulo inicial fosse retângulo e isósceles, a mediatriz da hipotenusa o dividiria em dois triângulos retângulos equivalentes.

07.19. Se os arcos em que ficou dividida a circunferência possuem o mesmo comprimento, então o triângulo ABC é equilátero, ou seja, cada um dos ângulos internos mede 60°.

Cálculo da medida do lado do triângulo equilátero **ABC**:

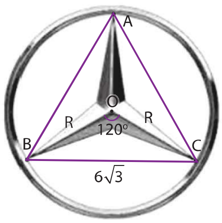
$$S = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \text{sen} 60°$$

$$27\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ell^2 = 108$$

$$\ell = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Cálculo da medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero:



Lei dos cossenos no triângulo **OBC**:

$$(BC)^2 = (OB)^2 + (OC)^2 - 2 \cdot (OB) \cdot (OC) \cdot \cos 120°$$

$$(6\sqrt{3})^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot (-\cos 60°)$$

$$108 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$108 = 3R^2$$

$$36 = R^2$$

$$R = 6\ (R > 0)$$

Portanto, a medida do raio dessa circunferência é igual a 6 cm.

07.20.

a) A medida da área do triângulo pode ser calculada por meio de:

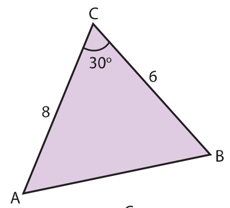
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \text{sen}\, \hat{C}$$

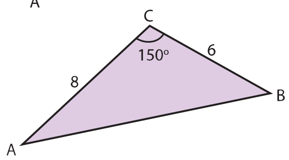
Como $\mathbf{S = 12\ cm^2}$, **AC = 8 cm** e **BC = 6 cm**, tem-se:

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \text{sen}\hat{C}$$

$$\text{sen}\, \hat{C} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\hat{C} = 30°$ ou $\hat{C} = 150°$, e os possíveis esboços são os seguintes:





b) Para o ângulo de 30°, pela lei dos cossenos, tem-se:

$$(AB)^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 30°$$

$$(AB)^2 = 100 - 48\sqrt{3}$$

Para o ângulo de 150°, de forma análoga, tem-se:

$$(AB)^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 150°$$

$$(AB)^2 = 100 + 48\sqrt{3}$$

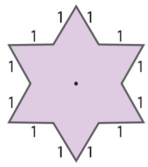
Logo, a soma dos quadrados das possíveis medidas do lado **AB** é igual a:

$$(100 - 48\sqrt{3}) + (100 + 48\sqrt{3}) = 200\ \text{cm}^2$$

Aula 08

08.01. a

Se o triângulo é rotacionado em 60°, a figura formada será um polígono côncavo de 12 lados (dodecágono). Os 12 lados do dodecágono são congruentes de modo que cada um deles mede 1 cm (estrela de 6 pontas), pois os triângulos que representam cada ponta da estrela possuem lado cuja medida é igual a 1/3 da medida do triângulo equilátero que foi rotacionado.



O perímetro do dodecágono côncavo é igual a 12 cm.

08.02. a

I. Falsa.

$$\cos^2\alpha+\text{sen}^2\beta=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{2b^2}{a^2}$$

II. Verdadeira.

$$\text{tg}\alpha=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\text{tg}\beta}$$

III. Verdadeira.

$$\text{sen}\alpha=\frac{c}{a}=\cos\beta$$

IV. Falsa.

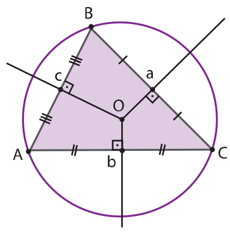
$$\cos\alpha=\frac{b}{a}\ \text{ e }\ \cos\beta=\frac{c}{a}$$

V. Falsa.

$$\text{sen}\alpha=\frac{c}{a}$$

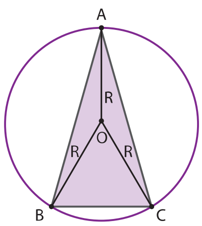
08.03. a

As mediatrizes dos três lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, equidistante dos vértices e denominado **circuncentro** do triângulo.



O ponto **O** é o circuncentro do triângulo **ABC**.

O circuncentro é o centro da circunferência que passa pelos vértices **A**, **B** e **C** do triângulo e equidista desses vértices, mesmo que o triângulo seja isósceles:



O baricentro (ponto de encontro das medianas de um triângulo) coincide com o circuncentro apenas no caso de o triângulo ser equilátero.

08.04. c

Sendo **b** e **c** as medidas dos catetos opostos aos ângulos α e β, respectivamente, e **a** a medida da hipotenusa. Logo:

$$\text{sen}\alpha=4\cdot\text{sen}\beta$$

$$\frac{b}{a}=4\cdot\frac{c}{a}$$

$$b=4c$$

Se a medida do lado oposto ao ângulo α mede 40 cm, então $b = 40$:

$$40 = 4c$$

$$c = 10\text{ cm}$$

08.05. d

Se o perímetro do quadrado é igual a $400\sqrt{2}$ m, então a medida de cada lado é igual a $100\sqrt{2}$ m. Por Pitágoras, pode-se calcular a medida da diagonal **BD**:

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$$

$$(BD)^2=(100\sqrt{2})^2+(100\sqrt{2})^2$$

$$(BD)^2=20000+20000$$

$$(BD)^2=40000$$

$$BD=\sqrt{40000}\quad (BD > 0)$$

$$BD = 200\text{ m}$$

Como a porteira **EF** tem comprimento igual a 2 m, a medida da cerca é dada por:

200 m – 2 m = 198 m

08.06. c

Utilizando Pitágoras no triângulo **ABC**, tem-se:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$5^2 = 3^2 + (BC)^2$

$BC = 4$ m $\quad (BC > 0)$

Como **M** é ponto médio do segmento de extremos **B** e **C**, então $BM = MC = 2$ m.

Utilizando Pitágoras no triângulo **ABM**, tem-se:

$(AM)^2 = (AB)^2 + (BM)^2$

$(AM)^2 = 3^2 + 2^2$

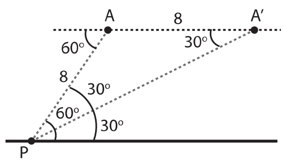
$(AM)^2 = 13$

$AM = \sqrt{13}$

$AM \cong 3{,}6$ m

08.07. b

Observe a seguinte ilustração:



O triângulo **AA´P** é isósceles, pois tem dois ângulos congruentes e iguais a 30°.

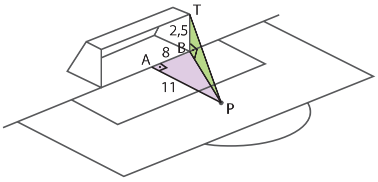
Logo, AP = AA´ = 8 km.

Se o avião percorreu AA´ = 8 km em 2 minutos, então sua velocidade é dada por:

$$v = \frac{8\,\text{km}}{2\,\text{min}} = \frac{8\,\text{km}}{\frac{2}{60}\text{h}} = \frac{8\,\text{km}}{\frac{1}{30}\text{h}} = 8\,\text{km} \cdot \frac{30}{1\text{h}} = 240\,\text{km/h}$$

08.08. a

Considere a seguinte ilustração na qual estão indicados os triângulos **APB** e **BPT**:



Utilizando Pitágoras no triângulo **APB**, tem-se:

$(BP)^2 = (AP)^2 + (AB)^2$
$(BP)^2 = 11^2 + 4^2$
$(BP)^2 = 137$

Utilizando Pitágoras no triângulo **BPT**, tem-se:

$(PT)^2 = (BP)^2 + (BT)^2$
$(PT)^2 = 137 + (2,5)^2$
$(PT)^2 = 137 + 6,25$
$(PT)^2 = 143,25$
$PT = \sqrt{143,25} \quad (PT > 0)$
$PT \cong \sqrt{144}$
$PT \cong 12$ m

08.09. b

Seja **P** o ponto de intersecção dos segmentos **MN** e **AB**.
O triângulo **APN** é retângulo com **AP = y/2**; **PN = x/2** e **AN = 4**. Então, utilizando Pitágoras, temos:

$(AN)^2 = (AP)^2 + (PN)^2$

$4^2 = (y/2)^2 + (x/2)^2$

$16 = y^2/4 + x^2/4$

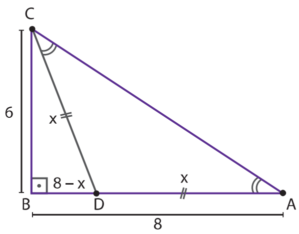
$64 = y^2 + x^2$

$64 - x^2 = y^2$

$y = \sqrt{64 - x^2}$; $y > 0$ e $0 < x < 8$

08.10. d

Observe a seguinte ilustração:



Sendo **x = AD = CD**, no triângulo retângulo **BCD**, de acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

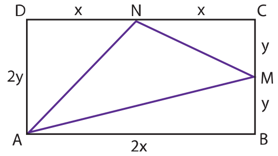
$(CD)^2 = (BC)^2 + (BD)^2$
$x^2 = 6^2 + (8 - x)^2$
$16x = 100$

$x = \frac{25}{4}$

Logo, $AD = \frac{25}{4}$ cm.

08.11. c

Considere a seguinte ilustração:



1. Verdadeira.

$$S_{ABM} = \frac{2x \cdot y}{2} = x \cdot y$$

$$S_{AND} = \frac{2y \cdot x}{2} = x \cdot y$$

Logo, os triângulos **ABM** e **AND** têm mesma área.

2. Falsa.

$$S_{ABM} = \frac{2x \cdot y}{2} = x \cdot y$$

$$S_{CNM} = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$\frac{S_{CNM}}{S_{ABM}} = \frac{\frac{x \cdot y}{2}}{x \cdot y} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a área do triângulo **CNM** é 1/2 da área do triângulo **ABM**.

3. Verdadeira.

$S_{ABCD} = 2x \cdot 2y = 4xy$

$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{AND} - S_{CNM}$

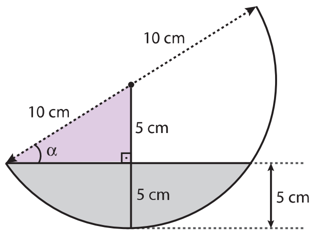
$$S_{AMN} = 4xy - xy - xy - \frac{xy}{2} = \frac{3xy}{2}$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3xy}{2}}{4xy} = \frac{3}{8}$$

Desta forma, a área do triângulo **AMN** é 3/8 da área do retângulo **ABCD**.

08.12. d

Observe a figura:



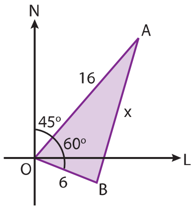
Utilizando a razão seno no triângulo retângulo em destaque, tem-se:

$$\text{sen}\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Como $0° < \alpha < 90°$, conclui-se que $\alpha = 30°$.

08.13. b

Em 1 hora, o primeiro navio teria percorrido 16 km, enquanto o segundo navio teria percorrido 6 km. Na próxima ilustração, de acordo com as trajetórias destacadas no enunciado, vamos considerar que, após uma hora, o primeiro navio situe-se no ponto **A**, o segundo navio esteja no ponto **B** e que ambos tenham partido do porto localizado no ponto **O**.



Aplicando a lei dos cossenos no lado de medida **AB**, do triângulo **ABO**, tem-se:

$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2 - 2 \cdot (AO) \cdot (BO) \cdot \cos 60°$

$(AB)^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$(AB)^2 = 196$

$(AB)^2 = 14^2$

$AB = 14$, pois $AB > 0$

Portanto, a distância entre os navios, após uma hora, é igual a 14 km.

08.14. b

Sejam **x** e **y** as medidas dos ângulos agudos e obtusos do losango, respectivamente. O losango pode ser decomposto em dois triângulos, de modo que a soma dos quatro ângulos internos é igual a 360°, ou seja:

$2x + 2y = 360°$

$x + y = 180°$

Mas, do enunciado, $\mathbf{2y = 3 \cdot 2x}$, o que corresponde a $\mathbf{y = 3x}$.

Substituindo $\mathbf{y = 3x}$ em $\mathbf{x + y = 180°}$, tem-se:

$x + 3x = 180°$

$4x = 180°$

$x = 45°$

Substituindo $x = 45°$ em $x + y = 180°$, tem-se $y = 135°$.

Utilizando a lei dos cossenos no triângulo ABC, em que B possui ângulo agudo de medida 45°, observando-se que AB = BC = L e sendo AC = d a medida da menor diagonal do losango, tem-se:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos 45°$

$d^2 = L^2 + L^2 - 2 \cdot L \cdot L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$d^2 = 2L^2 - \sqrt{2}L^2$

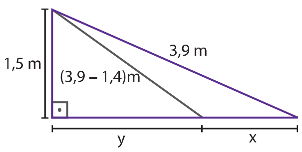
$d^2 = L^2 \cdot (2 - \sqrt{2})$

$L^2 = \frac{d^2}{2 - \sqrt{2}}$

$L = \sqrt{\frac{d^2}{2 - \sqrt{2}}}$, $(L > 0)$

$L = \frac{d}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$, $(d > 0)$

08.15. c



Triângulo menor

$(3{,}9 - 1{,}4)^2 = 1{,}5^2 + y^2$

$2{,}5^2 = 1{,}5^2 + y^2$

$y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$

Triângulo maior

$3{,}9^2 = 1{,}5^2 + (2 + x)^2$

$12{,}96 = (2 + x)^2$

$3{,}6 = 2 + x \Rightarrow x = 1{,}6$ m

08.16. 05 (01, 04)

Sem perda de generalidade, vamos considerar que **AD = DE = EC = AB = 1**.

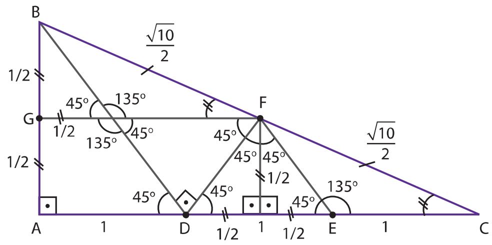
A medida da hipotenusa do triângulo, **BC**, pode ser calculada por meio do teorema de Pitágoras:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$(BC)^2 = 1^2 + 3^2$

$BC = \sqrt{10}$

Assim, considere a seguinte ilustração na qual já se encontram destacadas algumas medidas importantes para a resolução do problema:



Vamos analisar cada uma das afirmações:

01) Verdadeira. Utilizando a razão cosseno no triângulo retângulo **ABC**, tem-se:

$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

02) Falsa. Os triângulos **BDC** e **FEC** possuem ângulos congruentes, mas lados com medidas distintas. Isso significa que **BDC** e **FEC** são semelhantes, mas não são congruentes.

04) Verdadeira. $\text{sen}(B\hat{D}C) = \text{sen}(135°) = \text{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

08) Falsa. O triângulo **EDF** é retângulo e isósceles, mas o triângulo **BDF**, apesar de ser triângulo retângulo, não é isósceles. Logo, os triângulos **EDF** e **BDF** não são semelhantes.

16) Falsa. Lei dos senos no triângulo **EFC**:

$\frac{EC}{\text{sen}(E\hat{F}C)} = \frac{FC}{\text{sen}(C\hat{E}F)}$

$\frac{1}{\text{sen}(E\hat{F}C)} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\text{sen}(135°)}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot \text{sen}(E\hat{F}C)}{2}$

$\text{sen}(E\hat{F}C) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria:

$\text{sen}^2(E\hat{F}C) + \cos^2(E\hat{F}C) = 1$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\cos^2(E\hat{F}C)=1$$

$$\cos^2(E\hat{F}C)=1-\frac{1}{5}$$

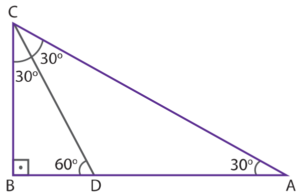
$$\cos^2(E\hat{F}C)=\frac{4}{5}$$

Como o ângulo $E\hat{F}C$ é agudo, necessariamente deve ter $\cos(E\hat{F}C)\quad 0$, logo:

$$\cos(E\hat{F}C)=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

08.17. 21 (01, 04, 16)

Considere a seguinte ilustração com as informações do enunciado:



01) Verdadeira.

O triângulo **ACD** é isósceles, ou seja, **AD = CD**.

Utilizando a razão cosseno no triângulo **BCD**, tem-se:

$$\cos 60°=\frac{BD}{CD}\Rightarrow CD=2\cdot BD$$

Desta forma, tem-se:

$AB = BD + AD = BD + CD = BD + 2 \cdot BD = 3 \cdot BD$

02) Falsa.

O ângulo $C\hat{D}B$ mede 60°.

04) Verdadeira.

Utilizando a razão seno no triângulo **ABC**, tem-se:

$$\text{sen}\,30°=\frac{BC}{AC}\Rightarrow AC=2\cdot BC$$

08) Falsa.

O triângulo **ADC** é isósceles, pois os ângulos dos vértices **A** e **C** são congruentes, cada um medindo 30°.

16) Verdadeira.

A medida, em radianos, do ângulo $C\hat{D}A$ é igual a 120° ou $\frac{2\pi}{3}$.

08.18. F – V – F – F – F – V

00) Falsa. As circunferências inscrita e circunscrita são concêntricas apenas no caso de o triângulo ser equilátero.

01) Verdadeira. O ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos é chamado de incentro. O incentro é o centro da circunferência inscrita.

02) Falsa. A área de um triângulo pode ser calculada pelo produto da medida do semiperímetro pelo apótema do triângulo, ou seja:

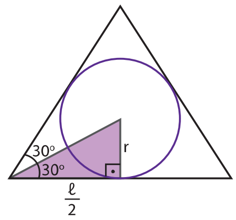
$$S=p\cdot r$$

$$S=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot r$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\cdot r$$

03) Falsa.

Observe a figura:



Utilizando a razão tangente no triângulo destacado, tem-se:

$$\text{tg}\,30°=\frac{r}{\frac{\ell}{2}}\rightarrow \ell=2\sqrt{3}\,r$$

04) Falsa.

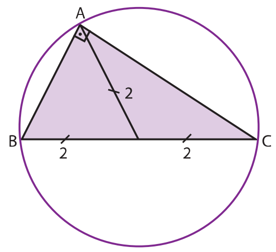
O incentro equidista dos três lados do triângulo.

O circuncentro equidista dos três vértices do triângulo.

Logo, os vértices do triângulo são equidistantes do centro da circunferência circunscrita.

05) Verdadeira.

Todo triângulo retângulo inscrito em uma circunferência possui, necessariamente, hipotenusa congruente ao diâmetro.



Assim, se o raio mede 2 cm, então a hipotenusa mede 4 cm.

08.19. Sejam **a = 6 m**, **b = 10 m** e **c = 12 m** as medidas dos lados do triângulo.

Inicialmente, pode-se calcular a medida da área do triângulo, utilizando-se a fórmula de Heron:

$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\ \text{ em que }\ p=\frac{6+10+12}{2}=14\text{ m.}$$

$$S=\sqrt{14\cdot(14-6)\cdot(14-10)\cdot(14-12)}$$

$$S=\sqrt{14\cdot 8\cdot 4\cdot 2}$$

$$S=8\sqrt{14}\text{ m}^2$$

Altura relativa ao lado de medida 6 m:

$$S=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

$$8\sqrt{14}=\frac{6\cdot h_a}{2}$$

$$h_a=\frac{8\sqrt{14}}{3}\text{ m}$$

Altura relativa ao lado de medida 10 m:

$$S=\frac{b\cdot h_b}{2}$$

$$8\sqrt{14}=\frac{10\cdot h_b}{2}$$

$$h_b=\frac{8\sqrt{14}}{5}\text{ m}$$

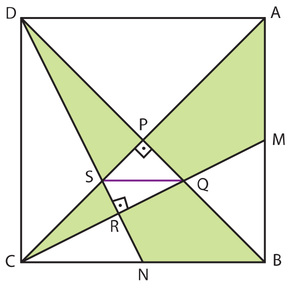
Altura relativa ao lado de medida 12 m:

$$S = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$8\sqrt{14} = \frac{12 \cdot h_c}{2}$$

$$h_c = \frac{8\sqrt{14}}{6} = \frac{4\sqrt{14}}{3}\text{ m}$$

08.20. No triângulo **ABC**, $\overline{PB}$ é mediana relativa ao vértice **B** e $\overline{CM}$ é mediana relativa ao vértice **C**. Logo, **Q** é baricentro do triângulo **ABC**. Analogamente, no triângulo **BCD**, $\overline{PC}$ é mediana relativa ao vértice **C** e $\overline{DN}$ é mediana relativa ao vértice **D**, de modo que **S** é o baricentro do triângulo **BCD**.



Dessa forma, o triângulo **DNB** é semelhante ao triângulo **DSQ** e, pela propriedade do baricentro distar 1/3 da mediana ao ponto médio de um lado e 2/3 da mediana ao vértice oposto, conclui-se que $\overline{SQ}$ é paralelo a $\overline{CB}$ e $SQ = \frac{CB}{3} = \frac{x}{3}$.

Consequentemente, o triângulo **PSQ** é retângulo e isósceles, ou seja, **PS = PQ**.

Utilizando Pitágoras no triângulo **PQS**, tem-se:

$$(SQ)^2 = (PS)^2 + (PQ)^2$$

$$(SQ)^2 = (PS)^2 + (PS)^2$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 2 \cdot (PS)^2$$

$$PS = \frac{\sqrt{2}x}{6}\text{, pois } PS > 0$$

Utilizando Pitágoras no triângulo **CDN**, tem-se:

$$(DN)^2 = (DC)^2 + (CN)^2$$

$$(DN)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5x^2}{4}$$

$$DN = \frac{\sqrt{5}x}{2}\text{, pois } DN > 0$$

Se o ponto **S** é baricentro do triângulo **BCD**, então:

$$SN = \frac{DN}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}x}{2} = \frac{\sqrt{5}x}{6}$$

O triângulo **CNR** é semelhante ao triângulo **QSR**. Logo:

$$\frac{CN}{SQ} = \frac{NR}{SR}$$

Da propriedade das proporções, pode-se escrever:

$$\frac{CN + SQ}{SQ} = \frac{NR + SR}{SR}$$

$$\frac{CN + SQ}{SQ} = \frac{SN}{SR}$$

Substituindo as medidas, tem-se:

$$\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{5}x}{6}}{SR}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$SR = \frac{\sqrt{5}x}{15}$$

Utilizando-se Pitágoras no triângulo **RQS**, tem-se:

$$(SQ)^2 = (SR)^2 + (QR)^2$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}x}{15}\right)^2 + (QR)^2$$

Resolvendo, obtém-se:

$$QR = \frac{2\sqrt{5}x}{15}$$

A área do triângulo retângulo **RQS** é dada por:

$$S_{RQS} = \frac{(SR).(QR)}{2}$$

$$S_{RQS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}x}{15} \cdot \frac{2\sqrt{5}x}{15}$$

$$S_{RQS} = \frac{x^2}{45}$$

A área do triângulo retângulo e isósceles **PQS** é dada por:

$$S_{PQS} = \frac{(PQ).(PS)}{2}$$

$$S_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}x}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}x}{6}$$

$$S_{PQS} = \frac{x^2}{36}$$

A área do quadrilátero **PQRS** é dada por:

$$S_{PQRS} = S_{PQS} + S_{RQS}$$

$$S_{PQRS} = \frac{x^2}{36} + \frac{x^2}{45}$$

$$S_{PQRS} = \frac{x^2}{20}$$

A área do triângulo **DBN** é igual à do triângulo **ACM**:

$$S_{DBN} = S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$$

A área sombreada é igual à área do triângulo **DBN** adicionada à medida da área do triângulo **ACM** e subtraída do dobro da área do quadrilátero **PQRS**:

$$S = S_{DBN} + S_{ACM} - 2 . S_{PQRS}$$

$$S = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2 \cdot \left(\frac{x^2}{20}\right)$$

$$S = \frac{2x^2}{5}$$

b) O perímetro do quadilátero PQRS é dado por:

$$PQ + RQ + SR + PS = \frac{\sqrt{2}x}{6} + \frac{2\sqrt{5}x}{15} + \frac{\sqrt{5}x}{15} + \frac{\sqrt{2}x}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot x$$

Aula 09

09.01. e

Apenas com a leitura do gráfico, não é possível analisar e quantificar o número de pessoas diagnosticadas com AIDS. Por outro lado, pelo gráfico apresentado pode-se corretamente concluir que o quociente do número de homens pelo de mulheres tendeu à estabilidade, iniciada em 2002.

09.02. b

Segundo os dados apresentados na tabela, o total do 1º trimestre é dado por:

$980 \cdot 31 + 1000 \cdot 28 + 960 \cdot 31 = 88140$

A alternativa **b** é a única que apresenta este valor para o 1º trimestre.

09.03. d

As quantidades de alunos que preferem as revistas **A**, **B**, **C** e **D** são, respectivamente, iguais a 15, 10, 25 e 20. Logo, o número de alunos que preferem a revista **D** é igual à média aritmética dos que preferem as revistas **A** ou **C**:

$$\frac{15+25}{2}=20$$

09.04. b

Fontes Renováveis	Energia (em Mtep*) 2012	2011
Energia hidráulica e eletricidade	39,2	39,9
Biomassa da cana	43,6	42,8
Lenha e carvão vegetal	25,7	26,0
Outras	11,8	11,1
Total	120,3	119,8

Houve uma diminuição de (120,3 – 119,8) Mtep = 0,5 Mtep

09.05. d

De acordo com as informações apresentadas, o gráfico que representa corretamente os dados reunidos na tabela é o da alternativa **d**.

09.06. d

Se a porcentagem das ações da empresa **D** é igual a **x**, então da empresa **E** será **2x**. Logo, $x + 2x + 26 + 17 + 30 = 100$. Ou seja, $x = 9$. Dessa forma, o valor das ações da empresa **E** é 18% e, portanto, a razão solicitada é igual a $\frac{18\%}{30\%}=0,60$.

09.07. c

Supondo que as informações estejam na mesma unidade, a seguinte tabela pode resumir as informações numéricas dos dois gráficos:

Mês	Receita	Despesa	Lucro
Janeiro	1000000	250000	750000
Fevereiro	1200000	200000	**1000000**
Março	600000	100000	500000
Abril	800000	150000	650000
Maio	1300000	400000	**900000**
Junho	1400000	550000	850000

Logo, os meses de maior lucro foram, em ordem decrescente, fevereiro (1000000) e maio (900000).

09.08. b

A partir do segundo dia, observa-se um menor nível de oxigênio no aquário que detinha o maior percentual de óleo. Essa influência torna-se maior a partir do terceiro dia. Assim, no período e nas condições do experimento, quanto maior a quantidade de óleo na água, maior a sua influência sobre o nível de concentração de oxigênio nela dissolvido.

09.09. e

A média aritmética da capacidade instalada dos 10 países apresentados é igual a:

$$\bar{X}=\frac{133+93+61+32+28+25+22+18+15+11}{10}$$

$$\bar{X}=\frac{438}{10}=43{,}8\,\text{GW}$$

Os países europeus são Alemanha (61 GW), Espanha (32 GW), Itália (28 GW), França (18 GW) e Reino Unido (11 GW). A média aritmética da capacidade instalada destes 5 países é igual a:

$$\bar{X}=\frac{61+32+28+18+11}{5}$$

$$\bar{X}=\frac{150}{5}=30\,GW$$

A média da capacidade instalada dos 5 países europeus corresponde, aproximadamente, a 68,49% da média aritmética dos 10 países:

$$\frac{30}{43{,}8}\cong 0{,}6849=68{,}49\%$$

09.10. d

a) **Falsa:** Nos 10 minutos iniciais, João percorreu uma distância menor do que a percorrida por Pedro.

b) **Falsa:** Nos 15 minutos iniciais, Pedro percorreu uma distância menor do que a percorrida por João.

c) **Falsa:** Com 20 minutos do início da corrida, João e Pedro tinham percorrido distâncias iguais.

d) **Verdadeira:** Com 30 minutos do início da corrida, João tinha percorrido cerca de 3500 m, enquanto Pedro tinha percorrido menos do que 3000 m. Logo, João tinha percorrido pelo menos 500 m a mais do que Pedro.

e) **Falsa:** Com 40 minutos do início da corrida, Pedro tinha percorrido 4000 m, enquanto João tinha percorrido 4500 m. Logo, com 40 minutos do início da corrida, Pedro tinha percorrido 500 m a menos do que João.

09.11. c

Por meio do gráfico apresentado, não é possível se determinar com exatidão a quantidade de ingressos vendidos em cada período considerado. A tabela seguinte apresenta a quantidade estimada de ingressos vendidos em função da quantidade de dias transcorridos desde o início das vendas:

Número de dias transcorridos	Número de ingressos vendidos
5	1
10	1 + 4 = 5
15	5 + 12 = 17
20	17 + 27 = 44
25	44 + 43 = 87
30	87 + 50 = 137
35	137 + 43 = 180
40	180 + 27 = 207
45	207 + 12 = 219
50	219 + 4 = 223
55	223 + 1 = 224
60	224 + 0 = 224

De acordo com os dados, o gráfico que melhor representa o total (acumulado) de ingressos vendidos até cada dia do período de vendas é o da alternatica **C**.

09.12. e

A quantidade total de pessoas é igual a: 6 + 10 + 15 + 4 + 3 + 1 = 39.

1.ª afirmação: Verdadeira

A porcentagem do total de pessoas que esperou até 2h45min na fila foi de, aproximadamente:

$$\frac{6+10+15}{39}=\frac{31}{39}\cong 0{,}795=79{,}5\%$$

2.ª afirmação: Falsa

A quantidade de pessoas que esperaram por menos de 2h40min é igual a:

6 + 10 = 16

Como a quantidade total de pessoas é igual a 39, conclui-se que menos da metade das pessoas esperaram por menos de 2h40min.

3.ª afirmação: Verdadeira

A quantidade de pessoas que esperaram entre 2h35min e 2h45min é igual a:

10 + 15 = 25

Logo, mais da metade das pessoas esperaram entre 2h35min e 2h45min.

4.ª afirmação: Verdadeira

O número de pessoas que esperou de 150 min até 160 min é igual a:

6 + 10 = 16

O número de pessoas que esperou de 2h45min até 3 h é igual a:

4 + 3 + 1 = 8

Portanto, o número de pessoas que esperou de 150 min até 160 min foi o dobro do número de pessoas que esperou de 2h45min até 3 h.

5.ª afirmação: Falsa

De acordo com o gráfico, 4 + 3+ 1 = 8 pessoas esperaram por mais de 2h45min.

09.13. b

A partir do gráfico, pode-se construir a seguinte tabela:

Número diário de atendimentos	Quantidade de meses desde o início da vacinação
1000	0
500	3
250	6
125	9
63	12
32	15

Os números da tabela indicam que a cada 3 meses a quantidade diária de atendimentos cai para cerca de 50% do valor anterior.

A precisão apresentada no gráfico permite concluir que a frase mais adequada à campanha de vacinação seria: "A cada três meses, a quantidade de pessoas que chega todos os dias ao hospital com a gripe **X** cai, **aproximadamente**, pela metade!"

09.14. a

Observe a quantidade total de embarques efetuados em cada categoria e a análise de cada afirmação:

embarques do mesmo passageiro		número de pessoas		número de embarques
5	X	1 000	=	5 000
4	X	1 500	=	6 000
3	X	3 000	=	9 000
2	X	10 000	=	20 000
1	X	60 000	=	60 000
		total	=	100 000

I. Verdadeira. Adicionando as quantidades de embarques de todas as pessoas que fizeram mais de um embarque, tem-se:

5 000 + 6 000 + 9 000 + 20 000 = 40 000

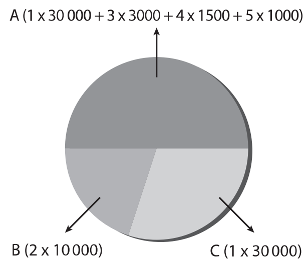
Mesmo que todos esses embarques sejam concentrados na companhia **A**, seriam ainda necessários 10 000 embarques de passageiros (dentre aqueles com apenas um embarque).

II. Falsa. Adicionando as quantidades de embarques de todas as pessoas que fizeram três ou mais embarques, tem-se:

5 000 + 6 000 + 9 000 = 20 000

É possível que todos eles tenham sido concentrados na companhia **B**.

III. Falsa. Existe a possibilidade de que, na distribuição, em que todos os clientes sejam "fiéis" à sua companhia. Observe um exemplo:



09.15. e

De acordo com o gráfico, nas 3 primeiras semanas, tem-se:

- Companhia **A**: 0,4 · 20000 + 0,6 · 25000 + 0,50 · 30000 = 38000 passageiros
- Companhia **B**: 0,4 · 20000 + 0,1 · 25000 + 0,15 · 30000 = 15000 passageiros
- Companhia **C**: 0,2 · 20000 + 0,3 · 25000 + 0,35 · 30000 = 22000 passageiros

Na quarta semana, tem-se:

- Companhia A: 50000 – 38000 = 12000 passageiros
- Companhia B: 20000 – 15000 = 5000 passageiros
- Companhia C: 30000 – 22000 = 8000 passageiros

Nessa semana, o número total de passageiros nas 3 companhias, **A**, **B** e **C**, foi igual a 25000.

Logo, os percentuais da quarta semana foram, respectivamente:

- $\frac{12000}{25000} = 0,48 = 48\%$
- $\frac{5000}{25000} = 0,20 = 20\%$
- $\frac{8000}{25000} = 0,32 = 32\%$

09.16. e

Sendo **V** o preço da gasolina em janeiro, após um aumento de **x%** e, em seguida, uma diminuição de **x%**, o preço é:

$\mathbf{V \cdot (1 + x\%) \cdot (1 - x\%) = V \cdot [1 - (x\%)^2]}$

A última expressão indica que o preço em março é $(x\%)^2$ menor do que o preço em janeiro.

09.17. a

A partir das informações do gráfico, a seguinte tabela pode ser construída:

Mês	Consumo	Custo do kWh	Custo Total
Janeiro	260	R$0,40	R$ 104,00
Fevereiro	240	R$0,40	R$ 96,00
Março	200	R$0,40	R$ 80,00
Abril	**180**	**R$0,40**	**R$ 72,00**
Maio	160	R$0,55	R$ 88,00
Junho	170	R$0,55	R$ 93,50
Julho	180	R$0,55	R$ 99,00
Agosto	190	R$0,55	R$ 104,50
Setembro	190	R$0,55	R$ 104,50
Outubro	190	R$0,70	R$ 133,00
Novembro	200	R$0,70	R$ 140,00
Dezembro	**220**	**R$0,70**	**R$ 154,00**

Assim, os meses de menor e maior custo de energia elétrica para esse consumidor serão, respectivamente, abril e dezembro.

09.18. a

I. Falsa. A temperatura média máxima ocorreu no dia 1º de janeiro e foi de 4 °C.

II. Verdadeira. No dia 4 de janeiro a temperatura média foi de 0 °C .

III. Verdadeira. A média das temperaturas nesses 8 dias foi igual a:

$$\overline{X} = \frac{4-1-3+0-1+3+2+1}{8}$$

$$\overline{X} = \frac{5}{8} = 0,625\ °C$$

Logo, a média das temperaturas nesses 8 dias foi maior do que 0 °C .

09.19. Gasto total dos turistas de viagens a lazer no Brasil, em 2012:

$0,468 \cdot 5\,670\,000 \cdot 877 = 2\,327\,172\,120$ dólares

Gasto total dos turistas de negócios no Brasil, em 2012:

$0,253 \cdot 5\,670\,000 \cdot 1599 = 2\,293\,781\,490$ dólares

Diferença entre o valor gasto pelos turistas de viagens a lazer e pelos turistas de negócios no Brasil, no ano de 2012:

$2\,327\,172\,120 - 2\,293\,781\,490 = 33\,390\,630$ dólares

09.20.

1. O percentual de mulheres com 5 filhos, representado por **x**, é dado por:
   $7 + 20 + 30 + 20 + 15 + x = 100$
   $92 + x = 1200$
   $x = 8\%$
   Logo, a quantidade de mulheres com 5 filhos é dada por: $0,08 \cdot 100 = 96$
2. A quantidade média de filhos por mulher deve ser ponderada pelo percentual de mulheres com cada número de filhos. Logo, sendo $\overline{X}$ a média de filhos por mulher, tem-se:
   $$\overline{X} = \frac{0 \cdot 7 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 8}{7 + 20 + 30 + 20 + 15 + 8} = \frac{240}{100}$$
   $$\overline{X} = 2,4 \text{ filhos por mulher}$$
3. Exatamente 15% + 20% + 8% = 43% das mulheres possuem 3 filhos ou mais. Logo, a probabilidade de uma mulher, escolhida ao acaso, ter 3 filhos ou mais é igual a 0,43.

Aula 07

07.01. a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} = -6-2+0-(12)-(0)-(1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -21$$

07.02. a

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix} = -12+3+4-(-24)-(6)-(1) = 12$$

a) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0-(-12) = 12$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12-(0) = -12$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -20-(0) = -20$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-20) = 20$

e) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-20) = 20$

07.03. a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2-b^2)+(-a^2+b^2)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2-b^2-a^2+b^2 = 0$$

Portanto,

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 0$ quaisquer que sejam os valores reais de ***a*** e de ***b***.

07.04. e

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 3 & 0 \\ c & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3a-b = 0 \Rightarrow b = 3a$$

07.05. d

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, então:

$$\frac{y}{x} = \frac{\begin{vmatrix} -4a & -4b \\ 5c & 5d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{(-4)\cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = -20$$

07.06. d

$A = -A^t$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & w \\ 2 & x & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ y & x & x \\ z & w & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & w \\ 2 & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -1 & -2 \\ -y & -x & -x \\ -z & -w & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -x \Rightarrow x = 0 \\ y = -1 \\ z = -2 \\ w = -x = 0 \end{cases}$$

Então:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Observação: após estudar as propriedades dos determinantes (aula 09), você poderá resolver esse teste de uma forma mais simples e direta, sem a necessidade de determinar os valores de **x**, **y** e **z**.

07.07. d

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ x & 3 & 9 \\ x & 4 & 16 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & 2 \\ x & 3 \\ x & 4 \end{matrix} \Rightarrow f(x) = 2x$$

$f(x) = 2x \Rightarrow f(0{,}001) = 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}002$

Mas $0{,}002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500} = 500^{-1}$. Portanto:

$f(0{,}001) = 500^{-1}$

Observação: após estudar sobre o *determinante da matriz de Vandermonde*, na **aula 10**, você concluirá de forma simples, sem usar a *regra de Sarrus*, que $f(x) = 2x$.

07.08. e

As matrizes que representam as vendas nos meses de janeiro e fevereiro, respectivamente, são:

$$J = \begin{bmatrix} 20 & 60 \\ 80 & 100 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 60 \end{bmatrix}$$

1. CORRETO.

$$J+F = \begin{bmatrix} 20 & 60 \\ 80 & 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 80 \\ 120 & 160 \end{bmatrix}$$

2. INCORRETO.

$$J = \begin{bmatrix} 20 & 60 \\ 80 & 100 \end{bmatrix} \Rightarrow J^t = \begin{bmatrix} 20 & 80 \\ 60 & 100 \end{bmatrix}$$

3. CORRETO.

$$\begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 40 \\ 20 & 60 \end{vmatrix} = 30 \cdot 60 - 20 \cdot 40$$

*Veremos, na **aula 09**, que o determinante de qualquer matriz quadrada é sempre igual ao determinante da sua transposta.

07.09. d

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\frac{\pi}{2} & \text{sen}\frac{\pi}{6} & \text{sen}\frac{3\pi}{2} \\ \text{sen}^2\frac{\pi}{2} & \text{sen}^2\frac{\pi}{6} & \text{sen}^2\frac{3\pi}{2} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\frac{\pi}{2} & \text{sen}\frac{\pi}{6} & \text{sen}\frac{3\pi}{2} \\ \text{sen}^2\frac{\pi}{2} & \text{sen}^2\frac{\pi}{6} & \text{sen}^2\frac{3\pi}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) - (1) = -\frac{3}{2}$$

Observação: assim como no teste **07.07**, este determinante não precisa ser calculado, necessariamente, pela *Regra de Sarrus*. Outra opção será apresentada na **aula 10**: *determinante da matriz de Vandermonde*.

07.10. b

Na face 5 temos $f = 5$. Portanto:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i+5, \text{ se } i = j \\ i, \quad \text{ se } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1+5 & 1 \\ 2 & 2\cdot 2+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 63 - 2 = 61$$

07.11. b

- $2 + x + y = 4 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$ **(I)**
- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = -19$

$2xy + 4 + 0 - (0) - (8) - (3y) = -19$

$2xy - 3y = -15 \Rightarrow y(2x - 3) = -15$ **(II)**

- Substituindo **(I)** em **(II)**:

$(2 - x)(2x - 3) = -15$

$4x - 6 - 2x^2 + 3x = -15$

$2x^2 - 7x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{9}{2}$

Mas **x** e **y** são inteiros. Portanto:

$x = -1 \Rightarrow y = 2 - (-1) = 3 \Rightarrow x \cdot y = -3$

07.12. 23 (01, 02, 04, 16)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 1-2 \\ 2-1 & 2\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = A + A^t$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

01) CORRETO.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$ apenas a diagonal principal tem elementos diferentes de zero.

02) CORRETO.

$$2 \cdot B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = 4 \cdot 16 - 0 \cdot 0 = 64$$

04) CORRETO.

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = B$$

08) INCORRETO.

$$A - A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - A^t) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-4) = 4$$

16) CORRETO.

A matriz A^t foi determinada no início desta resolução.

07.13. e

$(A + X)^t = B$

$A + X = B^t$

$X = B^t - A$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(X) = -12$$

07.14. b

Triângulos equiláteros tem lados de mesma medida. Logo, sendo **x** a medida dos lados desse triângulo equilátero, temos que

$$a_{ij} = d_{\overline{V_iV_j}} = \begin{cases} x, \text{ se } i \neq j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$$

Portanto:

$\det(A) = 54$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 54$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = 54 \Rightarrow 2x^3 = 54 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

07.15. c

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$

$(4 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - (1) \cdot (-2) = 0$

$4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3$

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

07.16. 10 (02, 08)

$$+\begin{cases} X+Y=3A \\ X-Y=2B \end{cases}$$

$$2X = 3A+2B \Rightarrow 2X = 3\cdot\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} -6 & -14 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X+Y=3A \Rightarrow Y=3A-X$$

$$Y = 3\cdot\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

01) INCORRETO.

$$\det(X) = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -12-(-28) = -12+28 = 16$$

02) CORRETO.

$$X^t = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

04) INCORRETO.

$$2X+Y = \begin{bmatrix} -6 & -14 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -19 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

08) CORRETO.

$$\det(Y) = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 18-(20) = -2$$

16) INCORRETO.

Na matriz Y, os elementos da diagonal secundária são negativos.

07.17. d

- $A^1 = A$
- $A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$
- $A^3 = A^2\cdot A = I_2\cdot A = A$
- $A^4 = A^3\cdot A = A\cdot A = A^2 = I_2$

Podemos concluir que:

- $(A)^{\text{expoente ímpar}} = A$ • $(A)^{\text{expoente par}} = I_2$

Portanto:

$$S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$$

$$S = \underbrace{(A^1 + A^3 + \ldots + A^{11})}_{\text{6 parcelas}} + \underbrace{(A^2 + A^4 + \ldots + A^{10})}_{\text{5 parcelas}}$$

$$S = \underbrace{(A + A + \ldots + A)}_{\text{6 parcelas}} + \underbrace{(I + I \ldots + I)}_{\text{5 parcelas}}$$

$$S = 6\cdot A + 5\cdot I$$

$$S = 6\cdot\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(S) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 25-36 \Rightarrow \det(S) = -11$$

07.18. d

01) CORRETO.

$$A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot I,$$

onde **I** indica, aqui, a matriz quadrada de ordem 2.

02) INCORRETO.

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\det(A\cdot B) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\det(A\cdot B) = -\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\det(A\cdot B) = -\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\det(A\cdot B) = -2$$

Outra maneira:

As matrizes **A** e **B** são quadradas e de mesma ordem.

Então, segundo o *teorema de Binet*, que será estudado na **aula 09**, temos:

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

$$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\det(A\cdot B) = (1-(-1))\cdot\left(-\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\det(A\cdot B) = 2\cdot(-1)$$

$$\det(A\cdot B) = -2$$

03) CORRETO.

• $B^1 = B$

• $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

• $B^3 = B^2 \cdot B = I_2 \cdot B = B$

• $B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = B^2 = I_2$

Podemos concluir que:

• $(B)^{\text{expoente ímpar}} = B$ • $(B)^{\text{expoente par}} = I_2$

Portanto:

$B^{2007} = B$

07.19. 50

• $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

• $\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

• $N = 50 + \det(A \cdot B) = 50 + 0 = 50$

07.20. a) 18 kg;

b) 11 anos

$p(x) = \det A$

$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \Rightarrow p(x) = 8 + 2x$

a) $\begin{cases} p(x) = 8 + 2x \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow p(5) = 8 + 2 \cdot 5 \Rightarrow p(5) = 18\,\text{kg}$

b) $\begin{cases} p(x) = 8 + 2x \\ p(x) = 30 \end{cases} \Rightarrow 30 = 8 + 2 \cdot x \Rightarrow x = 11\,\text{anos}$

Aula 08

08.01. b

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$A_{12} = (-1) \cdot (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)$

$A_{12} = (-1) \cdot (-2)$

$A_{12} = 2$

08.02. a

O elemento –2 localiza-se na primeira linha e na terceira coluna.

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

$A_{13} = 1 \cdot [3 \cdot 7 - 10 \cdot (-1)]$

$A_{13} = 31$

08.03. a

$C_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$C_{14} = (-1) \cdot (2 - 3 + 12 + 2 - 12 - 3)$

$C_{14} = (-1) \cdot (-2)$

$C_{14} = 2$

08.04. c

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}$

$A_{23} = (-1) \cdot (1 \cdot 9 - 4 \cdot 9)$

$A_{23} = (-1) \cdot (-27)$

$A_{23} = 27$

08.05. c

Vamos usar o teorema de Laplace usando a primeira linha da matriz.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 3 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{14}$

$\det(A) = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\det(A) = 3 \cdot 1 \cdot (-4 + 1 - 2 - 2) + 2 \cdot (-1) \cdot (5 + 1 - 4 + 1 - 2 - 10)$

$\det(A) = 3 \cdot (-7) - 2 \cdot (-9)$

$\det(A) = -3$

08.06. e

Vamos usar o teorema de Laplace usando a terceira coluna da matriz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=1\cdot A_{43}$$

$$\det(A)=(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=(-1)\cdot(-2-1)$$

$$\det(A)=(-1)\cdot(-3)$$

$$\det(A)=3$$

08.07. c

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & x\\ 2 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot[(-1)\cdot 1-x\cdot 2]=1+2x$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & x\\ y & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(1\cdot 2-x\cdot y)=-2+xy$$

Assim:

$$1+2x=-1\Rightarrow x=-1$$

$$-2+xy=-7\Rightarrow -2+(-1)\cdot y=-7\Rightarrow y=5$$

$$y-2x=5-2\cdot(-1)=7$$

08.08. d

Vamos usar o teorema de Laplace usando a quarta linha da matriz.

$$A=\begin{bmatrix}0 & y & z & w\\ x & 0 & 0 & w\\ x & 0 & z & 0\\ x & y & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=x\cdot A_{41}+y\cdot A_{42}$$

$$\det(A)=x\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}y & z & w\\ 0 & 0 & w\\ 0 & z & 0\end{vmatrix}+y\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & z & w\\ x & 0 & w\\ x & z & 0\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=x\cdot(-1)\cdot(-yzw)+y\cdot 1\cdot(xzw+xzw)$$

$$\det(A)=xyzw+2xyzw$$

$$\det(A)=3xyzw$$

08.09. d

$$p(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ 3 & 1 & x & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$p(x)=1\cdot A_{11}+2\cdot A_{21}+3\cdot A_{31}$$

$$p(x)=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & x & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$p(x)=1\cdot(3-9x-2)-2\cdot(2x+1-3x-2)+3\cdot(2+9-3-3)$$

$$p(x)=-9x+1+2x+2+15$$

$$p(x)=-7x+18$$

Portanto, o coeficiente de x é –7.

08.10. b

$$\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 0\\ 1 & x & 1 & 2\\ 2 & 0 & x & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=16$$

$$x\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\ 0 & x & 3\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=16$$

$$x\cdot(2x^2)=16$$

$$2x^3=16$$

$$x^3=8$$

Considerando que x é um número real, então $x=2$.

Portanto, $x^2=2^2=4$.

08.11. c

$$\begin{vmatrix}x^2 & 0 & x & -\frac{1}{10}\\ 7{,}5 & 0 & 5 & 2\\ 10 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$1\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}x^2 & x & -\frac{1}{10}\\ 7{,}5 & 5 & 2\\ 10 & 4 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$10x^2+20x-3+5-15x-8x^2=0$$

$$2x^2+5x+2=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\text{ ou } x=-2$$

Portanto:

Nenhuma raiz é nula.

A soma das raízes é $-\frac{5}{2}$.

O produto das raízes é 1.

08.12. d

$$\det(B)=\begin{vmatrix}a & b & c & 0\\ d & e & f & 0\\ g & h & i & 0\\ 2 & \frac{3}{2} & 6 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$\det(B)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}$$

$$\det(B)=\frac{1}{2}\cdot\det(A)$$

Como o determinante da matriz A é positivo, então $\det(B)<\det(A)$.

08.13. d

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (2x+6-3-6-2x+3) - 2 \cdot (2x+2+3-2+2x+3) +$$

$$+1 \cdot (-x-1+3+1-x+3) = 0$$

$$-8x - 12 - 2x + 6 = 0$$

$$-10x = 6 \Rightarrow x = -\frac{6}{10} = -0{,}6$$

08.14. a

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = x \cdot (-2x^2 + x) - 3 \cdot (-1)$$

$$\det(A) = -2x^3 + x^2 + 3$$

08.15. c

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+B) = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A+B) = -3 \cdot (-2+1+1-2)$$

$$\det(A+B) = 6$$

08.16. b

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 10 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A = 3 \cdot 1 \cdot (12-10-12+6) + 4 \cdot (-1) \cdot (12+20+20-20-12-20) +$$

$$+6 \cdot 1 \cdot (-3+6+5-6)$$

$$A = -12 + 12$$

$$A = 0$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = 1 \cdot (3-12-8-9-8-4) + 1 \cdot (12+8+6-16+4+9)$$

$$B = -38 + 23$$

$$B = -15$$

Portanto, $A + 2B = 0 + 2 \cdot (-15) = -30$.

08.17. e

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot (16+27+4-12-6-24) = -6 \cdot 5 = -30$$

Note que $-30 = -2 \cdot 3 \cdot 5$.

Portanto, o número de divisores de –30 é:

$$2 \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$$

08.18. d

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & k \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x \cdot x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & k \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x^2 \cdot (x^3 - kx)$$

$$f(x) = x^5 - kx^3$$

Como $f(-2) = 8$, temos:

$$(-2)^5 - k \cdot (-2)^3 = 8$$

$$-32 + 8k = 8 \Rightarrow k = 5$$

08.19. $S = \{1, 2\}$

$\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2\cdot(x-1)+2\cdot(x-1)^2+(x-1)^2-(x-1)^2+2\cdot(x-1)^2-2\cdot(x-1)=0$$

$$4\cdot(x-1)^2-4\cdot(x-1)=0$$

$$4\cdot(x-1)\cdot(x-1-1)=0$$

$x-1=0$ ou $x-1-1=0$

$x=1$ ou $x=2$

Portanto, o conjunto solução da equação é {1, 2}.

08.20. $x = 1$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ x & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 78 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - x\cdot 78$$

$$3\cdot[-8\cdot(x+1)-5\cdot(x+1)]=-78x$$

$$-8x-8-5x-5=-26x$$

$$13x=13$$

$$x=1$$

Aula 09

09.01. e

$\det(A) = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$

$\det(B) = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$

$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\det(A\cdot B) = (-2)\cdot(-7)$

$\det(A\cdot B) = 14$

09.02. d

O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante da sua transposta.

$$\begin{vmatrix} x & 8 & 6 \\ y & 6 & 4 \\ z & 12 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 8 & 6 & 12 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

Dividimos a segunda e a terceira linhas por 2.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 8 & 6 & 12 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Trocamos a segunda e a terceira linhas entre si.

$$2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{vmatrix} x & 8 & 6 \\ y & 6 & 4 \\ z & 12 & 10 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -4\cdot(-8) = 32$$

09.03. a

$\det(A) = 2$

1) multiplicamos a segunda linha da matriz A por 3.

$\det(B) = 3\cdot\det(A) = 3\cdot 2 = 6$

2) dividimos a terceira coluna da matriz B por 5.

$$\det(C) = \frac{\det(B)}{5} = \frac{6}{5}$$

3) multiplicamos a primeira e a segunda colunas da matriz C por –1.

$\det(D) = \det(C)\cdot(-1)\cdot(-1)$

$$\det(D) = \det(C) = \frac{6}{5}$$

4) dividimos a primeira linha da matriz D por $\frac{1}{2}$.

$$\det(E) = \frac{\det(D)}{\frac{1}{2}}$$

$$\det(E) = 2\cdot\det(D) = 2\cdot\frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

09.04. e

$\det(3A) = \det(A^2)$

$3^3\cdot\det(A) = \det(A\cdot A)$

$27\cdot\det(A) = \det(A)\cdot\det(A)$

Como a matriz A é invertível, $\det(A) \neq 0$.

Assim:

$$\frac{27\cdot\det(A)}{\det(A)} = \frac{\det(A)\cdot\det(A)}{\det(A)}$$

$\det(A) = 27$

09.05. b

A matriz $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}04 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \end{bmatrix}$ tem filas paralelas proporcionais, como, por exemplo, a primeira e a segunda linha. Portanto, o determinante é igual a zero.

09.06. c

I. FALSA.

$\det(A) = a\cdot d - b\cdot c$

Se $a = d$ e $b = c$, então $\det(A) = a^2 - b^2$.

Dependendo dos valores de **a** e **b**, o determinante de **A** pode ser negativo ou igual a zero.

II. VERDADEIRA.

$\det(B) = \det(2A)$

$\det(B) = 2^2\cdot\det(A)$

$\det(B) = 4\cdot 5$

$\det(B) = 20$

III. VERDADEIRA.

Qualquer que seja a matriz quadrada A, $\det(A) = \det(A^t)$.

09.07. a

$f(x) = \det(2A)$

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 2x \\ 0 & 2x & 2x \end{vmatrix}$$

$f(x) = -8x^3$

$f(-2) = -8\cdot(-2)^3$

$f(x) = -8\cdot(-8)$

$f(x) = 64$

09.08. a

$\det(kA) = 192$

$k^3 \cdot \det(A) = 192$

$k^3 \cdot 3 = 192$

$k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$

09.09. 10

$\det(A\cdot B) = -60$

$\det(A)\cdot\det(B) = -60$

$1\cdot(-1)\cdot 3\cdot c\cdot 2\cdot 1 = -60$

$c = 10$

09.10. d

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{6\cdot(6-1)}{2}} \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = -720$$

Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 120 - 720 = -600$$

09.11. c

1) CORRETA.

No produto de matrizes, é válida a propriedade associativa.

2) INCORRETA.

No produto de matrizes, não é válida a propriedade comutativa.

3) CORRETA.

Na adição de matrizes, é válida a propriedade comutativa.

4) CORRETA.

O determinante do produto de duas matrizes quadradas A e B é igual ao produto dos determinantes de A e B.

5) INCORRETA.

O determinante da soma de duas matrizes quadradas A e B não é necessariamente igual à soma dos determinantes de A e B.

09.12. a

I. VERDADEIRA.

Quando trocamos entre si duas filas paralelas de uma matriz, o determinante da matriz muda de sinal. Assim:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

A primeira e a segunda linhas foram trocadas entre si.

II. FALSA.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 27\cdot(-2) = -54$$

III. VERDADEIRA.

Se uma fila é nula, o determinante é igual a zero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

A segunda linha é nula.

IV. VERDADEIRA.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por −2 e somando com a segunda linha, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

09.13. 23 (01, 02, 04, 16)

01) CORRETO.

$A = P^{-1}\cdot B\cdot P$

$\det(A) = \det(P^{-1}\cdot B\cdot P)$

$\det(A) = \det(P^{-1})\cdot\det(B)\cdot\det(P)$

$\det(A) = \dfrac{1}{\det(P)}\cdot\det(B)\cdot\det(P)$

$\det(A) = \det(B)$, pois $\det(P) \neq 0$

02) CORRETO.

$A^2 = (P^{-1}\cdot B\cdot P)\cdot(P^{-1}\cdot B\cdot P)$

$A^2 = (P^{-1}\cdot B)\cdot(P\cdot P^{-1})\cdot(B\cdot P)$

$A^2 = (P^{-1}\cdot B)\cdot I_n\cdot(B\cdot P)$

$A^2 = P^{-1}\cdot B^2\cdot P$

Portanto, A^2 é semelhante a B^2.

04) CORRETO.

$A = P_1^{-1}\cdot B\cdot P_1$ e $B = P_2^{-1}\cdot C\cdot P_2$

$A = P_1^{-1}\cdot\underbrace{P_2^{-1}\cdot C\cdot P_2}_{B}\cdot P_1$

$A = (P_1^{-1}\cdot P_2^{-1})\cdot C\cdot(P_2\cdot P_1)$

Como $(P_2\cdot P_1)^{-1} = P_1^{-1}\cdot P_2^{-1}$, então as matrizes A e C são semelhantes, pois:

$A = P_1^{-1}\cdot\underbrace{P_2^{-1}\cdot C\cdot P_2}_{B}\cdot P_1$

$A = (P_2\cdot P_1)^{-1}\cdot C\cdot(P_2\cdot P_1)$

08) INCORRETO.

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) =$$

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$$

16) CORRETO.

Como A e B são matrizes quadradas de ordem **n**, temos:

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = 0\cdot\det(B) = 0$$

09.14. b

$$2a_{ij} = 3b_{ij} \Rightarrow b_{ij} = \frac{2}{3}\cdot a_{ij}$$

$$B = \frac{2}{3}\cdot A$$

$$\det(B) = \det\left(\frac{2}{3}\cdot A\right)$$

$$\det(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\det(A)$$

$$\det(B) = \frac{16}{81}\cdot\frac{3}{4} = \frac{4}{27}$$

09.15. d

$$\det(3B) = 162$$

$$3^d\cdot\det(B) = 162$$

$$3^d\cdot 2 = 162$$

$$3^d = 81 \Rightarrow 3^d = 3^4 \Rightarrow d = 4$$

$$\det(2A\cdot A^t) = 4k$$

$$2^3\cdot\det(A)\cdot\det(A^t) = 4k$$

$$8\cdot 4\cdot 4 = 4k \Rightarrow k = 32$$

Portanto, $k + d = 32 + 4 = 36$.

09.16. d

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = -2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Multiplicando a terceira linha por -1 e somando com a segunda linha, temos:

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = -2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Assim:

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = -2\cdot 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12\cdot(-1) = 12$$

09.17. d

I. FALSA.

O determinante de uma matriz pode ser nulo mesmo que nenhuma fila seja nula.

II. VERDADEIRA.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal. Assim:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

III. VERDADEIRA.

$$\det(B) = (\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot\det(A)$$

$$\det(B) = (2-1)\cdot\det(A)$$

$$\det(B) = \det(A)$$

09.18. a

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\cdot\det(3M)$$

$$2^3\cdot\det(M\cdot M) - \sqrt[3]{2}^3\cdot\det(M\cdot M\cdot M) = \frac{2}{9}\cdot 3^3\cdot\det(M)$$

$$8\cdot\det(M)\cdot\det(M) - 2\cdot\det(M)\cdot\det(M)\cdot\det(M) = 6\cdot\det(M)$$

Como a matriz é invertível, $\det(M) \uparrow 0$. Assim:

$$8\cdot\det(M) - 2\cdot\det(M)\cdot\det(M) = 6$$

$$\det^2(M) - 4\cdot\det(M) + 3 = 0$$

$$\det(M) = 1 \text{ ou } \det(M) = 3$$

Portanto, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{1} = 1$ ou $\det(M^{-1}) = \frac{1}{3}$.

09.19.

a)

$$\det(P) = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 5 & b & 3 \\ 3 & a & 16 \end{vmatrix} = 16ab + 5ab - 3b^2 - 3a^2$$

$$\det(P) = 21ab - 3b^2 - 3a^2$$

$$\det(P) = -3\cdot(a^2 + b^2 - 7ab)$$

b)

$$Q = 2P$$

$$\det(Q) = \det(2P)$$

$$\det(Q) = 2^3\cdot\det(P)$$

$$\det(Q) = 8\cdot(-3)\cdot(a^2 + b^2 - 7ab)$$

$$\det(Q) = 24\cdot(-a^2 - b^2 + 7ab)$$

Portanto, o determinante da matriz Q é divisível por 24, quaisquer que sejam os inteiros a e b.

09.20. $x = 1$ ou $x = -1$

$$u = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x\cdot x\cdot x\cdot x = x^4$$

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u-1)^2 = 0 \Rightarrow u = 1$$

Assim:

$$x^4 = 1$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2+1)\cdot(x^2-1) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \, (x \notin \mathbb{R})$$

ou

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 1$$

Aula 07

07.01. V – V – V – V

07.02. d

$$D = 2n \Rightarrow 2n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n = 7$$

07.03. c

$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$35 = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0 \begin{cases} n = 10 \\ \text{ou} \\ n = -7 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o polígono regular tem 10 lados.

07.04. a

$$n = \frac{D}{3} \Rightarrow D = 3n$$

$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$3n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$6 = n - 3$$

$$n = 9$$

07.05. d

$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$D = \frac{9 \cdot (9-3)}{2}$$

$$D = 27$$

07.06. c

$$\frac{360°}{n} = 15° \Rightarrow n = \frac{360°}{15°} \Rightarrow n = 24$$

$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$D = \frac{24 \cdot (24-3)}{2}$$

$$D = 252$$

07.07. e

$$N(x) = \frac{x^2 - 3x}{2}$$

$$9 = \frac{x^2 - 3x}{2}$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \begin{cases} x = 6 \\ \text{ou} \\ x = -3 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Então, o polígono convexo, que possui ao todo 9 diagonais, tem exatamente 6 lados.

07.08. c

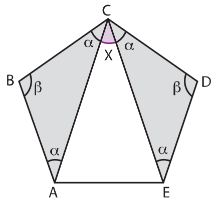
$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$D = \frac{13 \cdot (13-3)}{2}$$

$$D = 65$$

07.09. c

O pentágono da figura a seguir é regular. Então, os triângulos ABC e CDE, destacados, são isósceles e congruentes e β indica a medida do ângulo interno do pentágono.



Assim, temos:

$$\beta = \frac{180° \cdot (5-2)}{5} \Rightarrow \beta = 108°$$

$$\beta + \alpha + \alpha = 180°$$

$$108° + 2\alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 72°$$

$$\alpha + x + \alpha = 108°$$

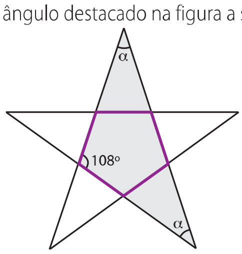
$$x = 108° - 2\alpha$$

$$x = 108° - 72° \Rightarrow x = 36°$$

O ângulo interno ACE mede 36°.

07.10. c

Cada ângulo interno de um pentágono regular mede 108° e o triângulo destacado na figura a seguir é isósceles.



Então:

$$108° + \alpha + \alpha = 180°$$

$$2\alpha = 180° - 108°$$

$$\alpha = 36°$$

07.11. a

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\frac{n(n-3)}{2} + 40 = \frac{(n+5)(n+5-3)}{2}$$

$n(n-3) + 80 = (n+5)(n+2) \Rightarrow n = 7$

07.12. b

Soma dos ângulos conhecidos: 780°

Como é um heptágono: n = 7

Então: 180° (n – 2) = 780° + x

180° (7 – 2) = 780° + x ⇒ x = 120°

07.13. b

- $n_1 = n - 2$
  $n_2 = n$
  $n_3 = n + 2$
- $180° (n_1 - 2) + 180° (n_2 - 2) + 180° (n_3 - 2) = 2\,160°$
  $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) = 12$
  $(n - 4) + (n - 2) + n = 12$
  $3n = 18$
  $n = 6 \Rightarrow n_1 = 4$, $n_2 = 6$ e $n_3 = 8$
  Logo, o que possui o menor número de lados, dentre eles, é um quadrilátero.

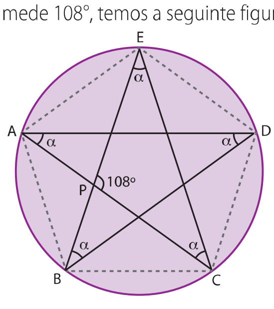
07.14. d

Primeira solução:
$S_i = 180° \cdot (n - 2)$
Sendo α a medida do ângulo remanescente, temos:
$180° \cdot (n - 2) - \alpha = 1900°$
$180° \cdot n - 360° - \alpha = 1900°$
$\alpha = 180° \cdot n - 2260°$
Como α é maior que 0° e menor que 180°, temos:
$0 < 180n - 2260 < 180$
$2260 < 180n < 2440$
$12{,}555... < n < 13{,}555...$
Portanto, $n = 13$ e $\alpha = 180° \cdot 13 - 2260° =$ **80°**.

Segunda solução:
A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é múltiplo de 180°, pois $S_i = 180° \cdot (n - 2)$. O menor múltiplo de 180° maior que 1900° é 1980° e o múltiplo seguinte é 2160°. Como a medida de qualquer ângulo interno é maior que 0° e menor que 180°, então o ângulo remanescente mede 1 980° – 1900° = **80°**.

07.15. b
$260° + 128° (n - 2) = 180° (n - 2)$
$260° + 128° n - 256 = 180 n - 360°$
$n = 7$

07.16. b
Os ângulos assinalados na figura do enunciado são congruentes. Então, fazendo
$a = b = c = d = e = \alpha$,
e lembrando que cada ângulo interno de um pentágono regular mede 108°, temos a seguinte figura:



Do triângulo PEC, temos:
$108° + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$
Portanto:
$a + b + c + d + e = 5\alpha = 5 \cdot 36° = 180°$

07.17. 09 (01, 08)
Sendo α_1 a medida do ângulo externo de P_1 e α_2 a medida do ângulo externo de P_2, temos:
$\alpha_1 = \alpha_2 + 15°$
$$\frac{360°}{n} = \frac{360°}{n+2} + 15°$$
$$\frac{360° \cdot (n+2)}{n \cdot (n+2)} = \frac{360° \cdot n + 15° \cdot n \cdot (n+2)}{n \cdot (n+2)}$$
$360° \cdot n + 720° = 360° \cdot n + 15° \cdot n^2 + 30° \cdot n$
$15° \cdot n^2 + 30° \cdot n - 720° = 0$
Dividindo por 15° cada termo da última equação, segue que:
$n^2 + 2n - 48 = 0 \Rightarrow n = 6$ ou $n = -8$ (não convém, pois $n > 0$).
□ $n = 6 \Rightarrow P_1$ tem 6 lados e P_2, tem 8.

01) Correto
P_2 tem 8 lados. Logo, é um octógono.

02) Incorreto
$$i = \frac{180° \cdot (8-2)}{8} = 135°$$

04) Incorreto
P_1 tem apenas 6 lados.

08) Correto
$$n = 8 \Rightarrow D = \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = 20$$

16) Incorreto
$n = 6 \Rightarrow S_i = 180° \cdot (6-2) = 720°$

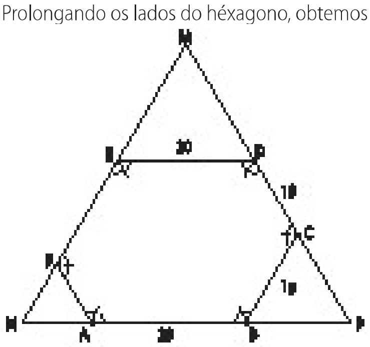
07.18. b

I. Correto
$n = D \Rightarrow n = n \cdot \dfrac{(n-3)}{2} \Rightarrow n = 5$ o pentágono é o único polígono que tem diagonais e lados em igual quantidade.

II. Incorreto
$D = 4n \Rightarrow 4n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} \Rightarrow n = 11.$ Ou seja:
$n = 11 \Rightarrow D = 44 = 4 \cdot 11$

III. Correto
Seja **x** um número natural.
□ $\dfrac{D}{n} = x$
$D = n \cdot x$
$\dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = n \cdot x \Rightarrow n = 2x + 3$
□ $x \in$ □ $\Rightarrow 2x$ é par $\Rightarrow 2x + 3$ é ímpar $\Rightarrow n$ é ímpar

07.19. 99 cm
Prolongando os lados do hexágono, obtemos a figura abaixo.



Cada um dos ângulos internos do hexágono da figura original mede $120°$, pois $\dfrac{180° \cdot (6-2)}{6} = 120°$.

Assim, conclui-se que os ângulos externos desse hexágono medem, cada um, 60°. Portanto, os triângulos **MED**, **NFA**, **PBC** e **PMN** são equiláteros, donde segue que:

- $MN = NP = MP = 20 + 13 + 15 = 48$
- $NF = NA = 48 - 23 - 15 = 10$
- $EF = 48 - 10 - 20 = 18$

Logo, o perímetro do hexágono ABCDEF é igual a 99 cm, pois:

$23\text{ cm} + 15\text{ cm} + 13\text{ cm} + 20\text{ cm} + 18\text{ cm} + 10\text{ cm} = 99\text{ cm}$.

07.20. 14

Sendo α a medida de um ângulo interno do polígono convexo de **n** lados, tal que $2004^\circ + \alpha = S_i$, temos:

- $S_i = 2004^\circ + \alpha$

$$180^\circ \cdot (n-2) = 2004^\circ + \alpha$$
$$\alpha = n \cdot 180^\circ - 2364^\circ \quad \text{(I)}$$
$$0 < \alpha < 180 \quad \text{(II)}$$

Substituindo **(I)** em **(II)**:

$$0 < n \cdot 180^\circ - 2364^\circ < 180^\circ$$
$$2364^\circ < n \cdot 180^\circ < 2544^\circ$$
$$13{,}1333... < n < 14{,}1333... \Rightarrow n = 14$$

O polígono possui 14 lados.

Aula 08

08.01. V – F – F – V

O ponto de intersecção das:
– medianas de um triângulo denomina-se **baricentro**;
– das mediatrizes de um triângulo denomina-se **circuncentro**;
– bissetrizes de um triângulo denomina-se **incentro**;
– alturas de um triângulo denomina-se **ortocentro**.

08.02. c

- $3x + (x + 15^\circ) + (75^\circ - x) = 180^\circ$

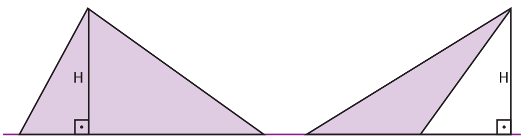
$$3x = 90^\circ$$
$$x = 30^\circ$$

- $x = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} 3x = 90^\circ \\ x + 15^\circ = 45^\circ \\ 75^\circ - x = 45^\circ \end{cases}$

Os ângulos internos do triângulo medem 45°, 45° e 90°. Portanto, trata-se de um triângulo retângulo e isósceles.

08.03. d

Observe as figuras a seguir:



O segmento de reta traçado de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é a altura desse triângulo.

08.04. d

- **Figura 1**:
  $74^\circ + 42^\circ + 42^\circ \neq 180^\circ \Rightarrow$ essa figura está com as medidas erradas.
- **Figura 2**:
  $18^2 \neq 12^2 + 15^2 \Rightarrow$ essa figura está com as medidas erradas.
- **Figura 3**:
  $15 > 8 + 6 \Rightarrow$ essa figura está com as medidas erradas.

Portanto, todas as figuras estão com as medidas erradas.

08.05. c

Se os lados de um triângulo medem 13 cm, 15 cm e x cm, então, pela desigualdade triangular, temos que:

$|15 - 13| < x < 13 + 15 \Rightarrow 2 < x < 28$

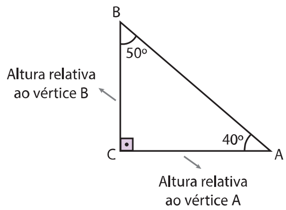
Portanto, a maior medida inteira que o terceiro lado pode assumir é igual a 27.

08.06. d

Se $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$ e $\hat{C}$ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC, então:

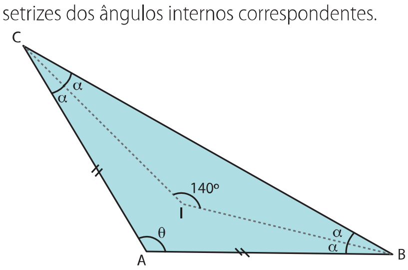
$40^\circ + 50^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow$ o triângulo ABC é retângulo em C.

Portanto, o ângulo formado pelas alturas relativas aos vértices A e B mede 90°, conforme indicado na figura a seguir.



08.07. c

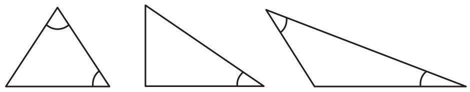
No triângulo ABC, os lados AB e AC têm medidas iguais. Logo, os ângulos internos relativos aos vértices B e C são congruentes. Supondo que a medida desses ângulos, em graus, é igual a 2α, construímos a figura a seguir, onde as linhas tracejadas indicam as bissetrizes dos ângulos internos correspondentes.



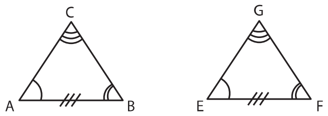
- **Do triângulo BCI**:
  $\alpha + \alpha + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$
- **Do triângulo ABC**:
  $$2\alpha + 2\alpha + \theta = 180^\circ$$
  $$\theta = 180^\circ - 4\alpha$$
  $$\theta = 180^\circ - 4 \cdot 20^\circ$$
  $$\theta = 100^\circ$$
- Dos resultados anteriores, conclui-se que os A, B e C medem, respectivamente: 100°, 40° e 40°.

08.08. d

I. Verdadeira.

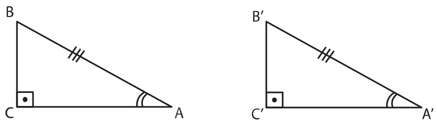


II. Verdadeira – Congruentes significa de mesmas medidas.

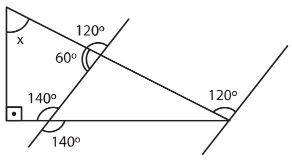


III. Falsa – Congruentes não é sinônimo de semelhantes.

IV. Verdadeira.



08.09. e

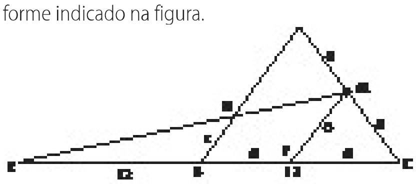


$x + 60° + 140° + 90° = 360°$

$x = 70°$

08.10. c

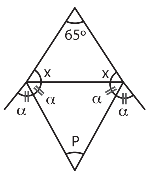
Considerando o ponto P_1 médio de BC, temos o triângulo MPC, equilátero, e o triângulo PME, semelhante ao triângulo EBN, conforme indicado na figura.



Da semelhança dos triângulos EBN e EPM, temos:

$\dfrac{6}{x} = \dfrac{6+12}{12} \Rightarrow x = 4$ o segmento $\overline{BN}$ mede 4 cm.

08.11. d



- $65° + 2x = 180°$

$x = 57{,}5°$

$2\alpha + x = 2\alpha + = 180°$

$2\alpha + x = 2\alpha + P \Rightarrow P = x \Rightarrow P = 57{,}5°$

$P = 57°30'$

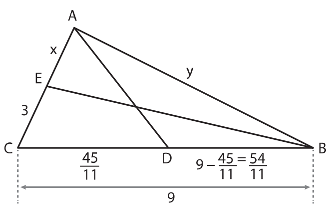
08.12. b

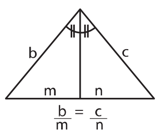
$x + 8 < (x + 3) + (x + 3)$

$x + 8 < 2x + 6 \Rightarrow x > 2$

$x > 2 \Rightarrow x = 3$ é o menor valor inteiro e positivo que x pode assumir.

08.13. a

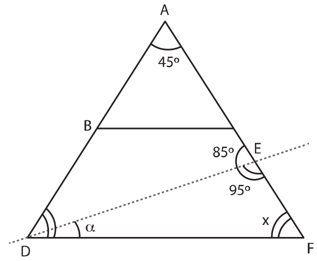




$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{\frac{45}{11}} = \dfrac{y}{\frac{54}{11}} \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 6$$

$(2p) = 2 + 3 + 9 + 6 = 20$

08.14. $\alpha = 17° 30'$



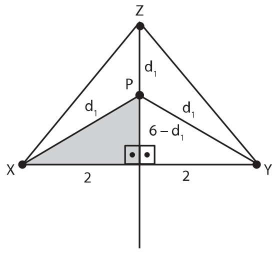
- $45° + 2x = 180°$

$x = 67{,}5°$

- $\alpha + 95° + 67{,}5° = 180°$

$\alpha = 17{,}5° = 17° 30'$

08.15. a

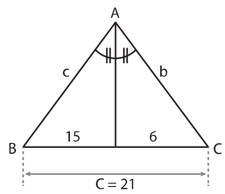


- $d_1^2 = 2^2 + (6 - d_1)^2 \Rightarrow d_1^2 = 4 + 36 - 12\,d_1 \cancel{+\,d_1^2}$

$d_1 = \dfrac{40}{12} = \dfrac{10}{3}$

- $6 - d_1 = 6 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{8}{3}$

08.16. d



- $c + b + 21 = 49$

$c + b = 28$ (I)

- $\dfrac{c}{15} = \dfrac{b}{6}$

$c = \dfrac{5b}{2}$ (II)

Substituindo (II) em (I):

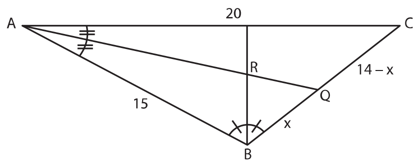
- $\dfrac{5b}{2} + b = 28$

$5b + 2b = 56 \Rightarrow b = 8$

- $c = \dfrac{5 \cdot 8}{2} = 20$

Resposta: 8, 20 e 21

08.17. c



- Do triângulo ABC:

$$\frac{20}{14-x} = \frac{15}{x}$$

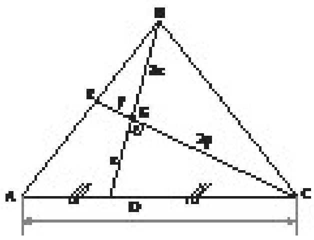
$x = 6$

- Do triângulo ABQ:

$$\frac{15}{AR} = \frac{6}{QR}$$

$$\frac{QR}{AR} = \frac{6}{15} = 0{,}4$$

08.18. b



- G é o baricentro, portanto: $EG = y \Rightarrow GC = 2y$.
- $2y + y = 12$

$3y = 12$

$y = 4$

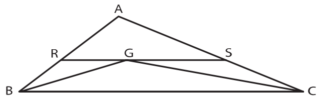
$2y = 8$

- $S_{ABC} = \dfrac{BD \cdot 2y}{2} = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32$

Mas $S_{ADB} = S_{DBC}$ e $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{DBC}$. Portanto:

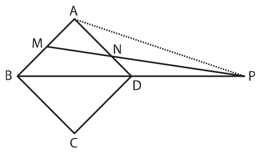
$S_{ABC} = 32 + 32 = 64$

08.19. 30 cm



Os ângulos $R\hat{B}G$ e $C\hat{B}G$ são congruentes, assim como os ângulos $C\hat{B}G$ e $B\hat{G}R$. Então o triângulo BGR é isósceles, com BR = RG. Analogamente, CS = SG. Assim, AS + AR + RS = AB + AC = 30 cm.

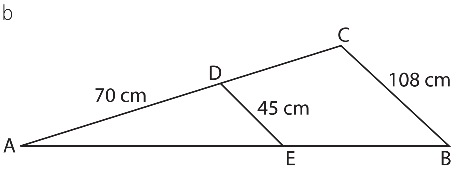
08.20. $\overline{AN} = 6$ cm



Traçando o segmento $\overline{PA}$, temos que N é o baricentro do triângulo ABP. Assim, $AN = \dfrac{2}{3} \cdot 9 = 6$ cm.

Aula 09

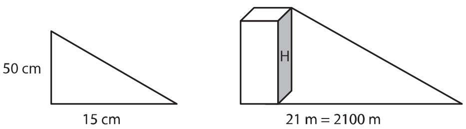
09.01. b



Se o segmento BC é paralelo ao segmento ED, então o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE. Dessa semelhança, segue que:

$$\frac{AC}{70} = \frac{108}{45} \Rightarrow AC = 70 \cdot \frac{108}{45} \Rightarrow AC = 168\ \text{cm}$$

09.02. b



$$\frac{50}{H} = \frac{15}{2100}$$

$H = 700\ \text{cm} = 70\ \text{m}$

09.03. a

- $\dfrac{45}{y} = \dfrac{20+30}{30} \Rightarrow y = 27$

- $\dfrac{x+36}{36} = \dfrac{20+30}{30} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow x = 24$

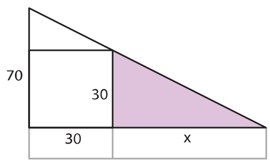
09.04. a

$$\frac{H}{5} = \frac{15}{3} \Rightarrow H = 25\ \text{m}$$

09.05. c

$$\frac{12}{x} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 3$$

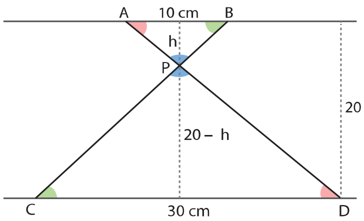
09.06. a



$$\frac{70}{30} = \frac{30+x}{x} \Rightarrow x = 22{,}5\ \text{cm}$$

09.07. 10 (02, 08)

Na figura a seguir, os pares de ângulos que estão destacados com a as mesmas cores são congruentes (ou são pares de ângulos opostos pelo vértice, ou são alternos internos).



Da figura, temos que

(I): os triângulos APB e CPD são semelhantes, pois seus ângulos correspondentes são congruentes;

(II): $h = 5\text{ cm}$ e $20 - h = 15\text{ cm}$, pois, da semelhança entre os triângulos,

$$\frac{20-h}{h} = \frac{30}{10} \Rightarrow \frac{20-h}{h} = 3 \Rightarrow h = 5\text{ cm} \Rightarrow 20 - h = 15\text{ cm}$$

A seguir, a análise das afirmações.

01) Incorreto

$$\frac{S_{APB}}{S_{CPD}} = \frac{\frac{10 \cdot h}{2}}{\frac{30 \cdot (20-h)}{2}} = \frac{h}{3 \cdot (20-h)} = \frac{5}{3 \cdot 15} = \frac{1}{9}$$

02) Correto

$$S_{APB} = \frac{10 \cdot h}{2} = 5 \cdot h = 5 \cdot 5 = 25\text{ cm}^2$$

04) Incorreto

A altura do triângulo CPD mede 15 cm.

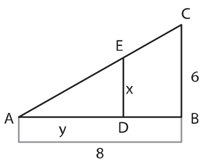
08) Correto

Os triângulos APB e CPD são semelhantes, pois seus ângulos correspondentes são congruentes.

16) Correto

$$S_{CPD} = \frac{30 \cdot (20-h)}{2} = 15 \cdot (20-h) = 15 \cdot 15 = 225\text{ cm}^2 > 200\text{ cm}^2$$

09.08. d



Considere, na figura, que os segmentos ED e CB são paralelos.

$$S_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$S_{ADE} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{1}{2} 24 \Rightarrow xy = 24 \quad \text{(I)}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{y} \Rightarrow x = \frac{3}{4} y \quad \text{(II)}$$

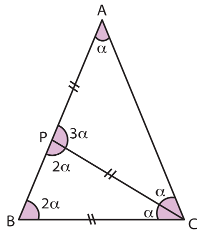
Substituindo (II) e (I):

$$\frac{3}{4} y \cdot y = 24$$

$$y^2 = 32 \Rightarrow y = 4\sqrt{2} = \overline{AD}$$

09.09. 21 (01, 04, 16)

Considerando um triângulo isósceles ABC, onde cada ângulo interno da base BC mede 2α, construímos, de acordo com as informações do enunciado, a figura a seguir.



01) Correto.

Considerando o ângulo interno $B\hat{A}C$:

$\text{med}(BAC) = \alpha$

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

02) Incorreto.

Se CP fosse também mediana relativa ao lado AB, o triângulo BPC seria, necessariamente, equilátero, pois $BP = PA$ implica $BP = PC = BC$. Porém, isso não ocorre, uma vez que $\alpha = 36^\circ \neq 60^\circ$.

04) Correto.

Observe, na figura anterior, que ambos os triângulos BPC e BCA têm ângulos internos medindo α, 2α e 2α. Portanto, são semelhantes.

08) Incorreto.

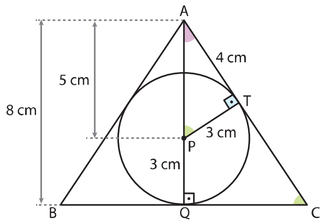
O ângulos internos do triângulo BPC medem α, 2α e 2α, enquanto que os ângulos internos do triângulo APC medem α, α e 3α. Portanto, não são semelhantes e, consequentemente, não são congruentes.

16) Correto.

Dois dos ângulos internos do triângulo BPC medem 2α. Portanto, BPC é um triângulo isósceles.

09.10. c

De acordo com enunciado, construímos a figura a seguir, onde T representa o ponto onde a circunferência de centro **P** tangencia o lado AC do triângulo ABC, e Q é o ponto de tangencia com o lado BC.



O triângulo ATP é retângulo, de cateto 3 cm e hipotenusa 5 cm. Pelo teorema de Pitágoras, determinamos a medida do cateto AT (4 cm).

Os triângulos ATP e AQC são semelhantes, de acordo com as medidas dos ângulos indicadas na figura. Portanto:

$$\frac{QC}{PT} = \frac{AQ}{AT} \Rightarrow \frac{QC}{3} = \frac{8}{4} \Rightarrow QC = 6\text{ cm}.$$

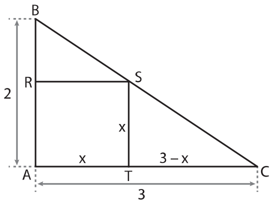
Mas AT é a altura do triângulo isósceles ABC, donde segue que $BQ = QC = 6$ cm. Então:

$BC = BQ + QC$

$BC = 6\text{ cm} + 6\text{ cm}$

$BC = 12\text{ cm}$

09.11. d



Da semelhança entre os triângulos ABC e STC, temos:

$$\frac{3-x}{3}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{6}{5}$$

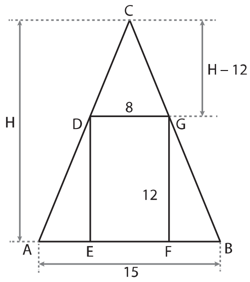
Portanto:

- $S_{ARST}=x^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$
- $S_{ABC}=\frac{3\cdot 2}{2}=3$
- $\frac{S_{ARST}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{36}{25}}{3}=\frac{12}{25}=0{,}48\ \Rightarrow\ S_{ARST}=0{,}48\cdot S_{ABC}$

Ou seja, a área do quadrado ARST equivale a 48% da área do triângulo ABC.

09.12. d

Considere **H** como sendo a medida da altura do triângulo ABC, e as demais medidas indicadas na figura a seguir.



Os triângulos DGC e ABC são semelhantes. Portanto:

$$\frac{H-12}{H}=\frac{8}{15}$$

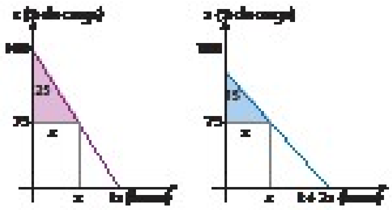
$$15\cdot H-15\cdot 12=8\cdot H$$

$$15\cdot H-180=8\cdot H$$

$$7\cdot H=180\ \Rightarrow\ H=\frac{180}{7}$$

09.13. d

Em cada uma das figuras a seguir, o triângulo destacado e o triângulo determinado pelo gráfico e pelos eixos coordenados são semelhantes.



- Da semelhança entre os triângulos obtidos do gráfico em vermelho:

$$\frac{t}{z}=\frac{100}{25}\Rightarrow t=4z\ \text{(I)}$$

- Da semelhança entre os triângulos obtidos do gráfico em azul:

$$\frac{t+2}{z}=\frac{90}{15}\Rightarrow t=6z-2\ \text{(II)}$$

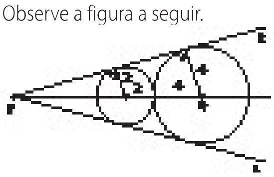
- Substituindo **(II)** em **(I)**:

$$6z-2=4z\Rightarrow z=1$$

- $z=1\Rightarrow t=4\cdot 1\Rightarrow\ t=4\,h$

09.14. d

Observe a figura a seguir.



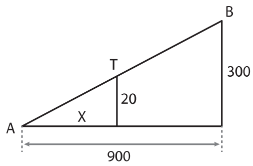
Pela semelhança dos triângulos retângulos indicados na figura, temos:

$$\frac{PQ-6}{PQ}=\frac{2}{4}$$

$$\frac{PQ-6}{PQ}=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot PQ-12=PQ\ \Rightarrow\ PQ=12$$

09.15. a) 60m b) $200\sqrt{10}$ s



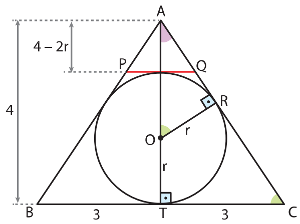
a) $\frac{300}{20}=\frac{900}{x}\ \Rightarrow\ x=60\text{ m}$

b) $AB^2=900^2+300^2\Rightarrow AB^2=9\cdot 10^4\cdot 10\Rightarrow AB=300=\sqrt{10}\text{ m}$

$$t=\frac{300\sqrt{10}\text{ m}}{1{,}5\text{ m/s}}=200\sqrt{10}\text{ s}$$

09.16. b

Na figura a seguir, considere as medidas em centímetros.



Nessa figura, AT indica a altura do triângulo isósceles ABC, de base BC.

- Do triângulo retângulo ATC, temos:

$$AC^2=AT^2+TC^2$$

$$AC^2=3^2+4^2\ \Rightarrow\ AC=5$$

- Os triângulos AOR e ATC são semelhantes. Portanto:

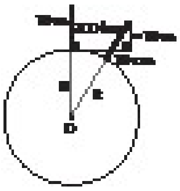
$$\frac{AO}{AC}=\frac{OR}{TC}$$

$$\frac{4-r}{5}=\frac{r}{3}\Rightarrow 2r=3$$

- Os triângulos APQ e ABC são semelhantes. Se **t** indica a medida do segmento PQ, então:

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{4-2r}{4}\Rightarrow\frac{t}{6}=\frac{4-3}{4}\Rightarrow t=1{,}5\text{ cm}$$

09.17. e



$$\frac{R}{20\,000\,000} = \frac{1000\text{ cm}}{10\text{ cm}}$$

$2R = 2 \cdot 10^7 \cdot 10^2$ cm

$2R = 4 \cdot 10^9$ cm $= 4 \times 10^4$ km

09.18. d

Os triângulos ABD e BCD são semelhantes.

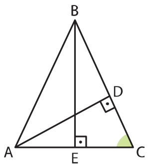
$$\frac{12}{BD} = \frac{BD}{4} \Rightarrow BD^2 = 48 \Rightarrow BD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$BC^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow BC = 8\text{ cm}$$

Como BC = 4EC, temos que EC = 2 em e BE = 6 cm.

Observe que os triângulos ABC e BDC são semelhantes. Como $\frac{12}{6} = \frac{4}{2} = 2$, temos que $\frac{4\sqrt{3}}{DE} = 2$, ou seja, $DE = \sqrt{3}$ cm.

09.19.

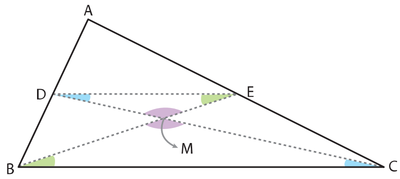


a) Os triângulos ADC e BEC são retângulos em D e C, respectivamente, e o ângulo agudo em destaque é comum a esses dois triângulos.
Considerando que o ângulo interno relativo ao vértice C mede α e que os ângulos internos $D\hat{A}C$ e $C\hat{B}E$medem β e θ, respectivamente, temos, pela lei angular de Tales, que $90^o + \alpha + \beta = 90^o + \alpha + \theta$, donde segue que $\beta = \theta$. Portanto, os triângulos ADC e BEC são semelhantes, pois seus pares de ângulos correspondentes são congruentes.

b) Se ADC e BEC são semelhantes, então
$$\frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC}.$$
Mas os lados DC e EC, do triângulo DEC, e os lados AC e BC, do triângulo ABC, determinam o mesmo ângulo interno (ângulo agudo em destaque).
Portanto, os triângulos DEC e ABC são semelhantes.

09.20. a) 19,2 m
Considerando que, na figura do enunciado, os segmentos **DE** e **AC** são paralelos, teremos então que os triângulos **ABC** e **BDE** são semelhantes. Portanto:
$$\frac{x}{2\text{ m}} = \frac{24\text{ m}}{2{,}5\text{ m}} \Rightarrow x = 19{,}2\text{ m}.$$

b) Se **D** e **E** são os pontos médios dos lados **AB** e **AC**, respectivamente, então o segmento **DE** é uma base média do triângulo ABC. Portanto, o segmento **DE** é paralelo ao lado **BC** e $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$. Consequentemente, os triângulos **DEM** e **BCM** são semelhantes, conforme indicado na figura a seguir.



Da semelhança entre os triângulos **DEM** e **BCM**, temos:

$$\frac{\mathbf{EM}}{\mathbf{BM}} = \frac{DE}{BC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EM}{BM} = \frac{1}{2} \Rightarrow BM = 2 \cdot EM,$$

conforme queríamos demonstrar.

Aula 07

07.01. b

$$\text{cossec}x = -\frac{7}{4} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{1}{-\frac{7}{4}} \Rightarrow \text{sen}x = -\frac{4}{7}$$

07.02. d

$$\frac{\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x} = \frac{\text{tg}x}{\sec^2x} = \frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2x}} = \frac{\text{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2x}{1} = \text{sen}x\cdot\cos x$$

07.03. a

$$B = \cos^4x - \text{sen}^4x$$
$$B = \left(\cos^2x + \text{sen}^2x\right)\cdot\left(\cos^2x - \text{sen}^2x\right)$$
$$B = 1\cdot\left(\cos^2x - \text{sen}^2x\right)$$
$$B = \cos^2x - \text{sen}^2x$$

07.04. d

$$E = \left(1-\cos^2x\right)\cdot\left(\text{cotg}^2x + 1\right)$$
$$E = \left(\text{sen}^2x\right)\cdot\left(\text{cossec}^2x\right)$$
$$E = \text{sen}^2x\cdot\frac{1}{\text{sen}^2x}$$
$$E = 1$$

07.05. a

$$\cos\theta\cdot\text{tg}\theta\cdot\text{cossec}\theta = \cos\theta\cdot\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\text{sen}\theta} = 1$$

07.06. b

- $\cos x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sec x = -3$
- $\begin{cases} \sec x = -3 \\ \sec^2x = 1+\text{tg}^2x \end{cases} \Rightarrow (-3)^2 = 1+\text{tg}^2x \Rightarrow \text{tg}^2x = 8$
- $\begin{cases} x \in 3^{\underline{o}}\ Q \\ \text{tg}^2x = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{tg}x = 2\sqrt{2}$

07.07. a

- $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2x = 1$$
$$\cos^2x = \frac{15}{16}$$

- $\begin{cases} x \in 2^{\underline{o}}\ Q \\ \cos^2x = \frac{15}{16} \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sec x = -\frac{4}{\sqrt{15}}$
- $\sec x = -\frac{4}{\sqrt{15}} \Rightarrow \sec x = -\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \Rightarrow \sec x = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

07.08. c

- $\text{sen}x = 0{,}6 = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{cossec}x = \frac{5}{3}$
- $\begin{cases} \text{cossec}^2x = 1+\text{cotg}^2x \\ \text{cossec}x = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 1+\text{cotg}^2x \Rightarrow \text{cotg}^2x = \frac{16}{9}$
- $\begin{cases} 0 < x < 90^\circ \\ \text{cotg}^2x = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{cotg}x = \frac{4}{3}$

Portanto:

$$\text{cotg}x\cdot\text{cossec}x = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{20}{9}$$

07.09. b

$$\text{tg}x + \text{cotg}x = 2$$
$$\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x} = 2$$
$$\frac{\text{sen}^2x + \cos^2x}{\cos x\cdot\text{sen}x} = 2$$
$$\frac{1}{\cos x\cdot\text{sen}x} = 2$$
$$\cos x\cdot\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x\cdot\text{sen}x = 0{,}5$$

07.10. b

$$\begin{cases} -1 \le \text{sen}x \le 1 \\ \text{sen}x = m-4 \end{cases} \Rightarrow -1 \le m-4 \le 1 \Rightarrow 3 \le m \le 5$$

07.11. d

$10\pi = 5\cdot 2\pi \Rightarrow 10\pi$ rad e 2π rad são medidas de arcos côngruos.

Portanto, $\sec(10\pi) = \sec(2\pi) = \frac{1}{\cos(2\pi)} = \frac{1}{1} = 1$

07.12. e

- $\text{tg}x = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \sqrt{5} \Rightarrow \cos x = \frac{\text{sen}x}{\sqrt{5}}$
- $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$$\text{sen}^2x + \left(\frac{\text{sen}x}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$
$$\text{sen}^2x + \frac{\text{sen}^2x}{5} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2x = \frac{5}{6}$$

07.13. $y = 3$

$$y=\frac{\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sec\left(8\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$y=\frac{\cos(2\pi)+2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}(\pi)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sec(4\pi)} \Rightarrow y=\frac{1+2\cdot 1-0}{0\cdot 1+1} \Rightarrow y=3$$

07.14. b

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)\cdot(1-\operatorname{sen}\theta)}{1-\operatorname{sen}\theta}=1+\operatorname{sen}\theta$$

07.15. e

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{cotg}x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{tg}x}=\frac{\cos^2 x-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{\operatorname{sen}^2 x-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}$$

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{cotg}x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x\cdot\left(\cos x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)}{\operatorname{sen}x\cdot\left(\operatorname{sen}x-\frac{1}{\cos x}\right)}$$

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{cotg}x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\frac{(\operatorname{sen}x\cdot\cos x-1)}{\operatorname{sen}x}}{\frac{(\operatorname{sen}x\cdot\cos x-1)}{\cos x}}$$

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{cotg}x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{(\operatorname{sen}x\cdot\cos x-1)}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\cos x}{(\operatorname{sen}x\cdot\cos x-1)}$$

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{cotg}x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{tg}x}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)^2=\operatorname{cotg}^2 x$$

07.16. d

- $M^2=(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=\operatorname{sen}^2 x+2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x+\cos^2 x=1+2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x$
- $N^2=(\operatorname{sen}x-\cos x)^2=\operatorname{sen}^2 x-2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x+\cos^2 x=1-2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x$
- $M^2+N^2=(1+2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x)+(1-2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x)=2$

07.17. c

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$(m-1)^2+\left(\sqrt{m-2}\right)^2=1$$

$$(m^2-2m+1)+(m-2)=1$$

$$m^2-m-2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1\ \left(\text{Não convém, pois } \cos\theta=\sqrt{m-2} \Rightarrow m\geq 2\right)\\ \text{ou}\\ m=2\end{cases}$$

07.18. c

$$\sqrt{a^2\cdot\cos u\cdot\cos^2 v+a^2\cdot\cos u\cdot\operatorname{sen}^2 v}=\sqrt{a^2\cdot\cos u\cdot\left(\cos^2 v+\operatorname{sen}^2 v\right)}$$

$$\sqrt{a^2\cdot\cos u\cdot\cos^2 v+a^2\cdot\cos u\cdot\operatorname{sen}^2 v}=\sqrt{a^2\cdot\cos u\cdot(1)}$$

$$\sqrt{a^2\cdot\cos u\cdot\cos^2 v+a^2\cdot\cos u\cdot\operatorname{sen}^2 v}=\sqrt{a^2\cdot\cos u}$$

Sendo $a>0$, segue que:

$$\sqrt{a^2\cdot\cos u\cdot\cos^2 v+a^2\cdot\cos u\cdot\operatorname{sen}^2 v}=a\cdot\sqrt{\cos u}$$

07.19. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4}\right\}$

$$x^2-2x\cos\theta+\operatorname{sen}^2\theta=0$$

$$x^2-2\cos\theta\cdot x+\operatorname{sen}^2\theta=0$$

Se as raízes dessa equação são reais e iguais, então:

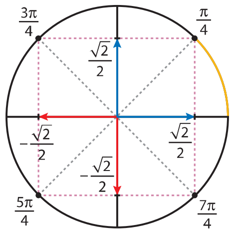
$\Delta=0$

$(-2\cos\theta)^2-4\cdot 1\cdot\operatorname{sen}^2\theta=0$

$4\cos^2\theta-4\operatorname{sen}^2\theta=0$

$\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=\operatorname{sen}\theta$ ou $\cos\theta=-\operatorname{sen}\theta$

$0\leq\theta\leq 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\pm\cos\theta$ se $\theta\in\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$, conforme indicado na figura a seguir.



07.20. $A=\frac{1}{1-\cos x}$

$$A=\frac{\operatorname{cotg}x+\operatorname{cossec}x}{\operatorname{sen}x}$$

$$A=(\operatorname{cotg}x+\operatorname{cossec}x)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

$$A=\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

$$A=\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

$$A=\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$A=\frac{\cos x+1}{1-\cos^2 x}$$

$$A=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)(1-\cos x)} \Rightarrow A=\frac{1}{1-\cos x}$$

Aula 08

08.01. e

$\sec x > 0 \Rightarrow \cos x > 0$

Cosseno e **secante** têm os mesmos sinais nos quadrantes, e são positivos para arcos do primeiro e para arcos do quarto quadrante. Portanto:

$\sec x > 0 \Rightarrow x \in 1^{\circ}_{.}\ Q$ ou $x \in 4^{\circ}_{.}\ Q$

08.02. b

$A = \cos x \cdot \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \sec x$

$A = \cos x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow A = 1$

08.03. b

- $\operatorname{cossec} x > 0 \Rightarrow x \in 1^{\circ}_{.}\ Q$ ou $x \in 2^{\circ}_{.}\ Q$
- $\operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow x \in 2^{\circ}_{.}\ Q$ ou $x \in 4^{\circ}_{.}\ Q$

Portanto:

- $\begin{cases} \operatorname{cossec} x > 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in 2^{\circ}_{.}\ Q$

08.04. c

Considerando que $(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \cdot (\cos x + \operatorname{cotg} x) = E$, temos:

$E = (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \cdot (\cos x + \operatorname{cotg} x)$

$E = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x \cdot \cos x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x$

$E = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$E = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x + \operatorname{sen} x + 1$

$E = (\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x) + (\operatorname{sen} x + 1)$

$E = \cos x(\operatorname{sen} x + 1) + (\operatorname{sen} x + 1)$

$E = (\operatorname{sen} x + 1)(\cos x + 1)$

08.05. d

$y = (\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta) \cdot (\sec\theta - \cos\theta) \cdot (\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$y = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta\right)$

$y = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}\right) \cdot \left(\dfrac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}\right) \cdot \left(\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$

$y = \dfrac{1}{\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$y = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta \,.\, \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow y = 1$

08.06. b

$\begin{cases} \theta \in 1^{\circ}_{.}\ Q \\ \operatorname{tg}\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = 45^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Ou seja, θ e 45° são medidas de arcos côngruos. Portanto:

$$\cos\theta = \cos(45^{\circ}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

08.07. d

$$\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{3\sec^2 x} = \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{3\sec^2 x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{3}$$

08.08. a

- $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{3}{5} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{16}{25}$
- $\begin{cases} x \in 2^{\circ}_{.}\ Q \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{16}{25} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{4}{5}$
- $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{3}{5} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \sec x = -\dfrac{5}{3};\ \operatorname{cossec} x = \dfrac{5}{4};\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3};\ \operatorname{cotg} x = -\dfrac{3}{4}$

Portanto, se

$y = \cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cossec} x$, então:

$y = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5} + \left(-\dfrac{4}{3}\right) + \left(-\dfrac{3}{4}\right) + \left(-\dfrac{5}{3}\right) + \dfrac{5}{4}$

$y = \dfrac{1}{5} - \dfrac{9}{3} + \dfrac{2}{4}$

$y = 0{,}2 - 3 + 0{,}5 = -2{,}3$

08.09. d

- $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x > 0$
- $\cos x = -\dfrac{12}{13} \Rightarrow \sec x = -\dfrac{13}{12}$
- $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$\left(-\dfrac{13}{12}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{25}{144} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{5}{12}$, pois $\operatorname{tg} x > 0$.

08.10. a

- $\dfrac{\operatorname{cossec}(x)}{\sec(x)} + \dfrac{\sec(x)}{\operatorname{cossec}(x)} = 5$

$\dfrac{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}{\frac{1}{\cos(x)}} + \dfrac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = 5$

$\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 5$

$\dfrac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} = 5$

$\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} = 5 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = \dfrac{1}{5}$

- $[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]^2 = \operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x)$

$[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]^2 = 1 + 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$

$[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]^2 = 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{5}$

$[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]^2 = \dfrac{7}{5}$

08.11. 41

- $\text{cossec}^2x = 1 + \text{cotg}^2x$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1 + \text{cotg}^2x \Rightarrow \text{cotg}^2x = \frac{9}{16} \Rightarrow \text{tg}^2x = \frac{16}{9}$$

- $9 \cdot \left(\sec^2x + \text{tg}^2x\right) = 9 \cdot \left(1 + \text{tg}^2x + \text{tg}^2x\right)$

$$9 \cdot \left(\sec^2x + \text{tg}^2x\right) = 9 \cdot \left(1 + 2\text{tg}^2x\right)$$

$$9 \cdot \left(\sec^2x + \text{tg}^2x\right) = 9 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{16}{9}\right)$$

$$9 \cdot \left(\sec^2x + \text{tg}^2x\right) = 9 \cdot \left(1 + \frac{32}{9}\right) = 9 + 32 = 41$$

08.12. 15

$$y = 12 \cdot \left(\frac{\sec x - \text{cossec}x}{1 - \text{cotg}x}\right)$$

$$y = 12 \cdot \left(\frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\text{sen}x}}{1 - \frac{\cos x}{\text{sen}x}}\right)$$

$$y = 12 \cdot \left(\frac{\frac{\text{sen}x - \cos x}{\cos x \cdot \text{sen}x}}{\frac{\text{sen}x - \cos x}{\text{sen}x}}\right)$$

$$y = 12 \cdot \frac{\text{sen}x - \cos x}{\cos x \cdot \text{sen}x} \cdot \frac{\text{sen}x}{\text{sen}x - \cos x}$$

$$y = 12 \cdot \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y = 12 \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow y = 12 \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow y = 15$$

Outra maneira:

- $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$$\text{sen}^2x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2x = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{3}{5}, \text{ pois } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}x > 0.$$

- $\begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \text{sen}x = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \sec x = \frac{5}{4};\ \text{cossec}x = \frac{5}{3};\ \text{cotg}x = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

Segue, então, que: $y = 12 \cdot \left(\frac{\sec x - \text{cossec}x}{1 - \text{cotg}x}\right) = 12 \cdot \left(\frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{3}}{1 - \frac{4}{3}}\right) = 15$

08.13. c

$$x^2 - 2 \cdot \text{tg}a \cdot x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2 \cdot \text{tg}a) \pm \sqrt{(-2 \cdot \text{tg}a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \cdot \text{tg}a \pm \sqrt{4 \cdot \text{tg}^2a + 4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot \text{tg}a \pm \sqrt{4 \cdot (\text{tg}^2a + 1)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot \text{tg}a \pm \sqrt{4 \cdot \sec^2a}}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot \text{tg}a \pm 2 \cdot \sec a}{2} \Rightarrow x = \text{tg}a \pm \sec a$$

08.14. a

$$y = \frac{(\sec x - \text{tg}x) \cdot (\sec x + \text{tg}x)}{(1 - \text{sen}^2x) \cdot (\text{cotg}x - \text{cossec}x) \cdot (\text{cotg}x + \text{cossec}x)}$$

$$y = \frac{\sec^2x - \text{tg}^2x}{\cos^2x \cdot (\text{cotg}^2x - \text{cossec}^2x)}$$

$$y = \frac{(1 + \text{tg}^2x) - \text{tg}^2x}{\cos^2x \cdot \left(\text{cotg}^2x - (1 + \text{cotg}^2x)\right)}$$

$$y = \frac{1}{\cos^2x \cdot (-1)} \Rightarrow y = -\frac{1}{\cos^2x} \Rightarrow y = -\sec^2x$$

08.15. b

$$A = \text{sen}^2x + (\text{sen}^2y - \text{sen}^2x \cdot \text{sen}^2y) + \cos^2x \cdot \cos^2y$$

$$A = \text{sen}^2x + \text{sen}^2y \cdot (1 - \text{sen}^2x) + \cos^2x \cdot \cos^2y$$

$$A = \text{sen}^2x + (\text{sen}^2y \cdot \cos^2x + \cos^2x \cdot \cos^2y)$$

$$A = \text{sen}^2x + \cos^2x \cdot (\text{sen}^2y + \cos^2y)$$

$$A = \text{sen}^2x + \cos^2x \cdot 1$$

$$A = \text{sen}^2x + \cos^2x \Rightarrow A = 1$$

08.16. a

$$M = \frac{\text{sen}A + \text{sen}B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\text{sen}A - \text{sen}B}$$

$$M = \frac{(\text{sen}A + \text{sen}B)(\text{sen}A - \text{sen}B) + (\cos A - \cos B)(\cos A + \cos B)}{(\cos A + \cos B) \cdot (\text{sen}A - \text{sen}B)}$$

$$M = \frac{\text{sen}^2A - \text{sen}^2B + \cos^2A - \cos^2B}{(\cos A + \cos B) \cdot (\text{sen}A - \text{sen}B)}$$

$$M = \frac{(\text{sen}^2A + \cos^2A) - (\text{sen}^2B + \cos^2B)}{(\cos A + \cos B) \cdot (\text{sen}A - \text{sen}B)}$$

$$M = \frac{1 - 1}{(\cos A + \cos B) \cdot (\text{sen}A - \text{sen}B)}$$

$$M = \frac{0}{(\cos A + \cos B) \cdot (\text{sen}A - \text{sen}B)} \Rightarrow M = 0$$

08.17. e

- $a > b > 0 \Rightarrow \text{tg}x = \frac{2ab}{a^2 - b^2} > 0 \Rightarrow \text{cotg}x = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$
- $\text{cossec}^2x = 1 + \text{cotg}^2x$

$$\text{cossec}^2x = 1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^2$$

$$\text{cossec}^2x = 1 + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4a^2b^2}$$

$$\text{cossec}^2x = \frac{4a^2b^2 + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}{4a^2b^2}$$

$$\text{cossec}^2x = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4a^2b^2}$$

$$\text{cossec}^2x = \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}^2x = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2$$

- $0^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow \text{sen}x > 0;\ a > 0 \text{ e } b > 0 \Rightarrow \frac{2ab}{a^2 + b^2} > 0,$

portanto,

$$\text{sen}^2x = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

08.18. c

- $\text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x = 0$

  $(\text{sen}^2 x - \text{sen}x \cdot \cos x) + (-2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x) = 0$

  $\text{sen}x(\text{sen}x - \cos x) - 2 \cdot \cos x \cdot (\text{sen}x - \cos x) = 0$

  $(\text{sen}x - \cos x) \cdot (\text{sen}x - 2 \cdot \cos x) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \text{sen}x - \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \text{sen}x - 2 \cdot \cos x = 0 \end{array} \right.$

- $\text{sen}x - \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \cos x \Rightarrow \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1$

- $\text{sen}x - 2 \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 2 \cdot \cos x \Rightarrow \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \text{tg}x = 2$

Os possíveis valores para $\text{tg}x$ são 1 e 2.

08.19. A = 0

$A = (\cos a + \cos b)(\cos a - \cos b) + (\text{sen}\,a + \text{sen}\,b)(\text{sen}\,a - \text{sen}\,b)$

$A = (\cos^2 a - \cos^2 b) + (\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b)$

$A = (\text{sen}^2 a + \cos^2 a) - (\text{sen}^2 b + \cos^2 b)$

$A = 1 - 1 \Rightarrow A = 0$

08.20. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

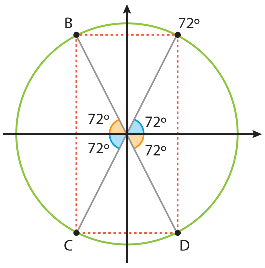
- $\begin{cases} \pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \\ |\sec\theta| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sec\theta = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{4}$

- $\theta = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\theta = \text{cotg}\theta = 1 \\ \text{sen}\theta = \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{cossec}\theta = \sec\theta = -\sqrt{2} \end{cases}$

- $\begin{cases} \text{tg}\theta = \text{cotg}\theta = 1 \\ \text{cossec}\theta = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1 + \text{tg}\theta + \text{cossec}\theta}{1 + \text{cotg}\theta} = \dfrac{1 + 1 + (-\sqrt{2})}{1 + 1} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}.$

Aula 09

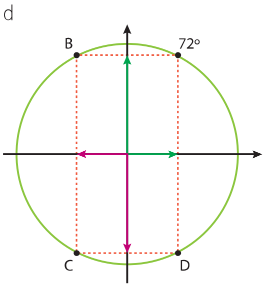
09.01. a



Da figura, temos que:

- $B = 180° - 72° = 108°$
- $C = 180° + 72° = 252°$
- $D = 360° - 72° = 288°$

09.02. d



Da figura, temos que:

a) Incorreto

$\cos B = -\cos 72°$

b) Incorreto

$\text{sen}\,B = \text{sen}72°$

c) Incorreto

$\text{sen}\,B > \cos 72°$

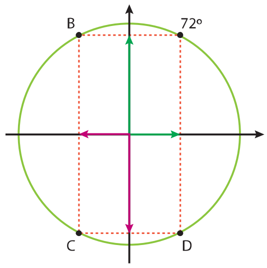
d) Correto

$\text{sen}\,B = \text{sen}72°$

e) Incorreto

$\cos B < \text{sen}\,72° \quad (\cos B < 0 \text{ e } \text{sen}72° > 0)$

09.03. c



Da figura, temos que:

a) Incorreto

$\cos C = -\cos 72° \Rightarrow \sec C = -\sec 72°$

b) Incorreto

$\text{sen}\,B = \text{sen}\,72° \Rightarrow \text{cossec}\,B = \text{cossec}\,72°$

c) Correto

$\text{cotg}C = \text{cotg}72°$

d) Incorreto

$\text{sen}\,C = -\text{sen}\,72° \Rightarrow \text{cossec}\,C = -\text{cossec}\,72°$

e) Incorreto

$\text{tg}\,B = -\text{tg}\,72°$

09.04. d

$\begin{cases} 220° \in 3^{\underline{o}}\ Q \Rightarrow \text{sen}220° < 0 \\ 220° = 180° + 40° \end{cases} \Rightarrow \text{sen}220° = -\text{sen}40°$

09.05. c

$\begin{cases} 335° \in 4^{\underline{o}}\ Q \Rightarrow \cos 335° > 0 \\ 335° = 360° - 25° \end{cases} \Rightarrow \cos 335° = \cos 25°$

09.06. e

$7344° = 20 \cdot 360° + 144°$ e $144° = 180° - 36° \Rightarrow$ reduzindo-se

ao primeiro quadrante um arco de 7344°, obtém-se um arco de 36°.

$36° = 36° \cdot \dfrac{\pi\ \text{rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{5}$ rad

09.07. a

- $2280° = 6 \cdot 360° + 120° \Rightarrow \cos(2280°) = \cos(120°)$
- $\begin{cases} 120° \in 2^{\circ} Q \Rightarrow \cos 120° < 0 \\ 120° = 180° - 60° \end{cases} \Rightarrow \cos 120° = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}$

Portanto:

$\cos(2280°) = \cos(120°) = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}$

09.08. a

$\begin{cases} 2000° = 5 \cdot 360° + 200° \\ 200° = 180° + 20° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2000° \in 3^{\circ} Q \\ \cos(2000°) = \cos(200°) = -\cos(20°) \\ \text{sen}(2000°) = \text{sen}(200°) = -\text{sen}(20°) \end{cases}$

a) **Correto**
$2000° \in 3^{\circ} Q \Rightarrow \cos(2000°) < 0$

b) **Incorreto**
$2000° \in 3^{\circ} Q \Rightarrow \text{sen}(2000°) < 0$

c) **Incorreto**
$\begin{cases} \text{sen}(2000°) = -\text{sen}(20°) \\ \cos(2000°) = -\cos(20°) \end{cases} \Rightarrow \text{sen}(2000°) \neq \cos(2000°)$, pois
$\text{sen}(20°) \neq \cos(20°)$

d) **Incorreto**
$\text{sen}(2000°) = -\text{sen}(20°) \neq 0 \Rightarrow \text{sen}(2000°) \neq -\text{sen}(2000°)$

e) **Incorreto**
$\text{sen}(2000°) < 0$ e $\cos(2000°) < 0 \Rightarrow \text{sen}(2000°) \neq -\cos(2000°)$

09.09. e

- $\cos\dfrac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}\dfrac{7\pi}{4} = \text{tg}\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\dfrac{\pi}{4} = -1$
- $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sec\dfrac{\pi}{3} = 2$

Portanto:

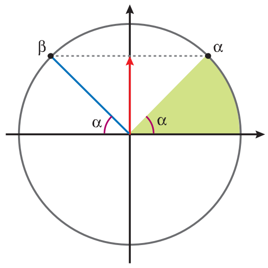
$y = \text{sen}\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{7\pi}{6} + \sec\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\dfrac{7\pi}{4}$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 + (-1)$

$y = \sqrt{3} + 1$

09.10. c

Considere, na figura, que α e β indicam as medidas de dois arcos distintos, menores que 360°, que têm, para seno, o mesmo valor positivo.



Então, é fácil verificar que $\alpha + \beta = 180°$.

09.11. b

- $\begin{cases} 0 < \theta < 360° \\ \text{sen}\theta = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \text{sen}\theta = \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45° \\ \text{ou} \\ \text{sen}\theta = \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 225° \end{array} \right.$

Logo:
As medidas dos ângulos θ entre 0° e 360°, para os quais $\text{sen}\theta = \cos\theta$, são 45° e 225°.

09.12. c

$\cos 45° - \text{sen} 45° + \cos 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

09.13. c

Da figura do enunciado, e das informações que ele oferece, temos que:

- $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}(x) = \text{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $\cos(x) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $y = \pi - \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}(y) = \text{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $\cos(y) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $z = \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \text{sen}(z) = -\text{sen}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(z) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Então, $\text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) + \cos(x) + \cos(y) + \cos(z)$ é igual a

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

09.14. e

Temos que:

- $2460° = 6 \cdot 360° + 300°$;
- $1110° = 3 \cdot 360° + 30°$;
- $2205° = 6 \cdot 360° + 45°$.

Desses resultados, segue que:

- $\text{cossec} 2460° = \text{cossec} 300° = \dfrac{1}{\text{sen} 300°} = \dfrac{1}{-\text{sen } 60°} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;
- $\sec 1100° = \sec 30° = \dfrac{1}{\cos 30°} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;
- $\text{cotg} 2205° = \text{cotg} 45° = \dfrac{1}{\text{tg} 45°} = 1$.

Portanto:

$A = \dfrac{-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}}{1} \Rightarrow A = -\dfrac{4}{3}$.

09.15. d

I. Correto

$92^\circ = 180^\circ - 88^\circ \Rightarrow tg92^\circ = -tg88^\circ$

II. Incorreto

$178^\circ = 180^\circ - 2^\circ \Rightarrow tg178^\circ = -tg2^\circ \neq tg88^\circ$

III. Correto

$268^\circ = 180^\circ + 88^\circ \Rightarrow tg268^\circ = tg88^\circ$

IV. Correto

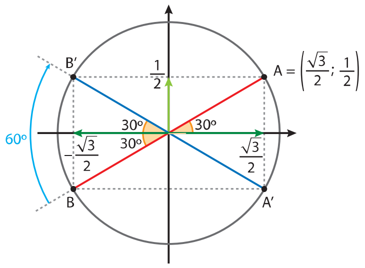
$272^\circ = 360^\circ - 88^\circ \Rightarrow tg272^\circ = -tg88^\circ$

09.16. a

Girando-se o ponteiro 60° no sentido horário, o ponto **B** se deslocará até o ponto

$$B' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right),$$

conforme indicado na figura a seguir.



09.17. c

Considere que **AB** é a base do triângulo isósceles OAB.
Note, observando a figura do enunciado, que:

- a base AB desse triângulo mede $2 \cdot sen\alpha$;
- a altura do triângulo OAB, relativa à base AB, mede $cos\alpha$.

Temos então que:

$$Área_{(OAB)} = \frac{(2 \cdot sen\alpha) \cdot cos\alpha}{2} = sen\alpha \cdot cos\alpha$$

09.18. b

- $senA = sen\beta = sen150^\circ = sen(180^\circ - 30^\circ) = sen30^\circ = \frac{1}{2}$
- $cosB = cos(360^\circ - 30) = cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Os valores de sen A e cos B são, respectivamente, $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

09.19. 2

- $m = sen\theta + cos\theta$

$m^2 = (sen\theta + cos\theta)^2$

$m^2 = sen^2 + cos^2 + 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$

$m^2 = 1 + 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$

- $n = sen\theta - cos\theta$

$n^2 = (sen\theta - cos\theta)^2$

$n^2 = sen^2 + cos^2 - 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$

$n^2 = 1 - 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$

- $\begin{cases} m^2 = 1 + 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta \\ n^2 = 1 - 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 = 2$

09.20. $\frac{k(3-k^2)}{2}$

- $senx + cosx = k$ (I)
- $senx + cosx = k$

$(senx + cosx)^2 = k^2$

$sen^2x + cos^2x + 2 \cdot senx \cdot cos\,x = k^2$

$1 + 2 \cdot senx \cdot cos\,x = k^2$

$senx \cdot cos\,x = \frac{k^2 - 1}{2}$ (II)

Sabe-se que $a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$. Então, substituindo **a** por $senx$ e **b** por $cosx$, temos que:

- $sen^3x + cos^3x = (senx + cosx) \cdot (sen^2x - senx \cdot cos\,x + cos^2x)$

$sen^3x + cos^3x = (senx + cosx) \cdot (1 - senx \cdot cosx)$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

- $sen^3x + cos^3x = k \cdot \left(1 - \frac{k^2 - 1}{2}\right)$

$sen^3x + cos^3x = k \cdot \left(\frac{2 - k^2 + 1}{2}\right)$

$sen^3x + cos^3x = k \cdot \left(\frac{3 - k^2}{2}\right)$

$sen^3x + cos^3x = \frac{k(3-k^2)}{2}$