Aula 04

04.01.

$f(x)=0{,}97x$

$f(1000)=0{,}97\cdot 1000$

$f(1000)=970$

04.02.

- $f(x)=x^2+2x$

  $f(0)=0^2+2\cdot 0=0$

  $f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)=-1$

  $f(2)=2^2+2\cdot 2=8$

  $f(-2)=(-2)^2+2\cdot(-2)=0$

- $f(0)+f(-1)+f(2)+f(-2)=0+(-1)+8+0=7$

04.03. Se A(x) corresponde à área, em cm^2, da parte hachurada (colorida) da figura, então A(x) é igual à área do retângulo, de dimensões 10 cm e 5 cm, diminuída da área do quadrado cujos lados medem x. Portanto:

$A(x)=10\cdot 5-x\cdot x$

$A(x)=50-x^2$

04.04.

$A(x)=50-x^2$

$A(5)=50-5^2$

$A(5)=25$

04.05.

$$\frac{\text{preço}}{\text{quantidade}}=\frac{14}{0{,}5}=\frac{28}{1{,}0}=\frac{42}{1{,}5}=\frac{56}{2{,}0}=\frac{98}{3{,}5}=28 \Rightarrow \frac{y}{x}=28$$

Portanto, $y=f(x)=28x$

04.06.

$f(x)=x^2$

$f(m+n)-f(m-n)=(m+n)^2-(m-n)^2$

$f(m+n)-f(m-n)=m^2+2mn+n^2-(m^2-2mn+n^2)$

$f(m+n)-f(m-n)=4mn$

04.07.

$f(x)=3x^3-2x^2-x+1$

$f(-2)=3\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)^2-(-2)+1$

$f(-2)=3\cdot(-8)-2\cdot(4)+2+1$

$f(-2)=-24-8+2+1$

$f(-2)=-29$

04.08.

Após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria, paga-se apenas 97% desse valor. Portanto, sendo f(x) o valor a ser pago após o desconto, temos que:

$f(x)=\frac{97}{100}\cdot x$

$f(x)=0{,}97x$

04.09.

- 2 é racional. Portanto, f(2) = 1
- $\sqrt{2}$ e $\left(2+\sqrt{2}\right)$ são irracionais. Portanto, $f\left(\sqrt{2}\right)=f\left(2+\sqrt{2}\right)=0$

Dos resultados anteriores, segue que:

$f(2)+f\left(\sqrt{2}\right)-f\left(2+\sqrt{2}\right)=1+0-0=1$

04.10.

- $-\sqrt{2}<-1 \Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right)=10\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+5=-10\sqrt{2}+5$
- $2\sqrt{2}>1 \Rightarrow f\left(2\sqrt{2}\right)=5\cdot 2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$
- $-1<\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=\frac{2}{4}-1=-\frac{1}{2}$

Dos resultados anteriores, segue que:

$$f\left(-\sqrt{2}\right)+f\left(2\sqrt{2}\right)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-10\sqrt{2}+5\right)+10\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2},$$

que é um número racional não inteiro.

04.11.

$x-1=m \Rightarrow x=m+1$

$$\begin{cases} f(x-1)=2x \\ x-1=m \\ x=m+1 \end{cases} \Rightarrow f(m)=2\cdot(m+1) \Rightarrow f(m)=2m+2$$

Substituindo **m** por **x – 2**, em $f(m)=2m+2$, temos que:

$f(x-2)=2\cdot(x-2)+2 \Rightarrow f(x-2)=2x-2$

04.12.

$$\begin{cases} f(x+1)=x^2+2x-3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow f(2+1)=2^2+2\cdot 2-3 \Rightarrow f(3)=5$$

04.13.

a) Incorreto

Se vender por 10 reais cada uma das x peças produzidas, o valor que receberá, em reais, é $R(x)=10x$.

b) Correto

$\text{Lucro}=\text{receita}-\text{custo}$

$L(x)=10x-(800+6x)$

$L(x)=4x-800$

c) Incorreto

$L(x)=4x-800$

$L(500)=4\cdot 500-800$

$L(500)=1200$

O lucro foi de R$ 1200,00.

d) Incorreto

$L(x)=4x-800$

$2500=4x-800$

$1700=4x$

$x=425$

$425>400$

e) Incorreto

$L(x)\geq 0$ (ou receita $\geq$ custo)

$4x-800\geq 0 \Rightarrow x\geq 200$

Produzindo e vendendo exatamente 200 peças, em um determinado mês, também não há prejuízo (200 < 201).

04.14.

I. Não é função
As mães de gêmeos e as mães de trigêmeos são associadas a mais de um filho.

II. É função
Cada um dos filhos é associado a uma única mãe.

III. Não é função
O filho único não tem irmão e, portanto, não há associação correspondente para ele.
Cada um dos trigêmeos é associado à exatamente dois irmãos.

04.15.

- Custo para remover x % dos poluentes:

$$\text{custo } (x\,\%) = \frac{100x}{105 - x}$$

- Custo para remover 100% dos poluentes:

$$\text{custo } (100\,\%) = \frac{100 \cdot 100}{105 - 100} = 2000 \text{ milhões de reais}$$

$$\text{custo } (100\,\%) = 2 \text{ bilhões de reais}$$

- Custo para remover 90% dos poluentes:

$$\text{custo } (90\,\%) = \frac{100 \cdot 90}{105 - 90} = 600 \text{ milhões de reais}$$

Portanto, para se remover os 10% restantes, o custo será de:
2 bilhões de reais − 600 milhões de reais = 1,4 bilhões de reais.

04.16.

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = ax + 1$$

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = -99$$
$$1 + f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = -99$$
$$f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = -100$$
$$(a+1) + (2a+1) + \ldots + (10a+1) = -100$$
$$(a + 2a + \ldots + 10a) + 10 = -100$$
$$(a + 2a + \ldots + 10a) = -110$$
$$55a = -110 \Rightarrow a = -2$$

$$a = -2 \text{ e } b = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 = (-2)^3 + 1^3 = -7$$

04.17.

Se a receita é obtida com a venda de x pratos, cada um custando $p = -0{,}4x + 200$ reais, então:

$$\text{Receita} = x \cdot p$$
$$21000 = x \cdot (-0{,}4x + 200)$$
$$21000 = -0{,}4x^2 + 200x$$
$$0{,}4x^2 - 200x + 21000 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-200}{0{,}4} = 500$$

k_1 e k_2 são as raízes da equação $21000 = x \cdot (-0{,}4x + 200)$. Portanto:
$k_1 + k_2 = x_1 + x_2 = 500$.

04.18.

$$g(x) = \frac{x}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \text{número no Brasil} \\ \frac{x}{6} = \text{número nos Estados Unidos} \end{cases}$$

$$f(x) = 40x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \text{número nos Estados Unidos} \\ 40x + 1 = \text{número na Coreia} \end{cases}$$

$$f(x) = 40x + 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{6}\right) = 40 \cdot \frac{x}{6} + 1 = \frac{20}{3}x + 1$$

Portanto:

$$x \text{ no Brasil} \Rightarrow \frac{x}{6} \text{ nos Estados Unidos} \Rightarrow \frac{20}{3}x + 1 \text{ na Coreia}$$

Ou seja, a função **h** que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$.

04.19. C(n) = 200000 + 0,5n

O valor de R$ 200000,00 é investido em máquinas (não depende do número de peças produzidas).
R$ 0,50 é o custo de produção de cada peça, não considerando o investimento de R$ 200000,00.
Portanto, sendo C(n) o custo total da produção de **n** peças, já considerando o valor investido em máquinas, temos que:

C(n) = 200000 + 0,5n

04.20. $\mathbf{m = 0}$ **ou** $\mathbf{m = \frac{1}{4}}$

- $f(x) = 2x - 1$

- $f(m^2) - 2f(m) + f(2m) = \frac{m}{2}$

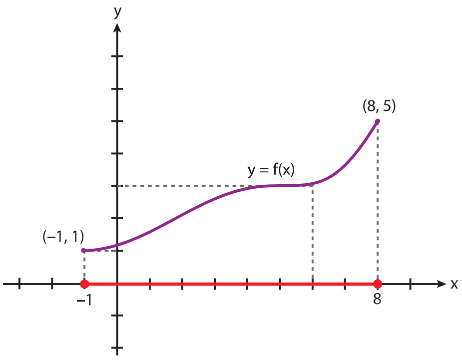
$$\left(2m^2 - 1\right) - 2 \cdot \left(2m - 1\right) + \left(2 \cdot 2m - 1\right) = \frac{m}{2}$$
$$2m^2 - 1 - 4m + 2 + 4m - 1 = \frac{m}{2}$$
$$2m^2 = \frac{m}{2}$$
$$4m^2 - m = 0 \Rightarrow m \cdot (4m - 1) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{1}{4}$$

Aula 05

05.01. Para cada **x** do domínio de uma função, (x, f(x)) é um ponto do gráfico dessa função.
Observe, na figura do enunciado, que (–1, 1) e (8, 5) são pontos do gráfico. Portanto:

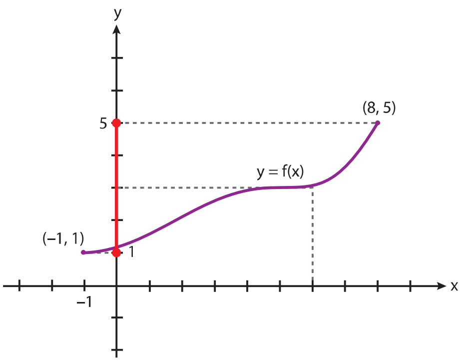
$$\begin{cases}(-1,\ 1)=\big(x,\ f(x)\big) \Rightarrow\ f(-1)=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ f(-1)+f(8)=1+5=6 \\ (8,\ 5)=\big(x,\ f(x)\big) \Rightarrow\ f(8)=5\end{cases}$$

05.02. Observe, na figura a seguir, que **x** pode assumir qualquer valor do intervalo [–1, 8], e apenas valores desse intervalo.



Portanto, o domínio dessa função é o intervalo [–1, 8].

05.03. Observe, na figura a seguir, que y = f(x) pode assumir qualquer valor do intervalo [1; 5], e apenas valores desse intervalo.



Portanto, o conjunto imagem dessa função é o intervalo [1; 5].

05.04. Do gráfico, temos que f(–2) = 4 e f(2) = 3, donde segue que f(–2) + f(2) = 4 + 3 = 7.

05.05. Da leitura do gráfico, verifica-se que f(–3) = f(–1) = f(5) = 0 e f(0) = 1. Logo: f(–3) + f(–1) + f(0) + f(5) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1

05.06. De acordo com o gráfico, temos:
D(f) = [1; 5] e Im(f) = [1; 6]

a) Incorreto
$3 \in [1; 5]$

b) Incorreto
$3 \in (f) = [1; 6]$

c) Incorreto
Im(f) = [1; 6]

d) Correto
D(f) = [1; 5]

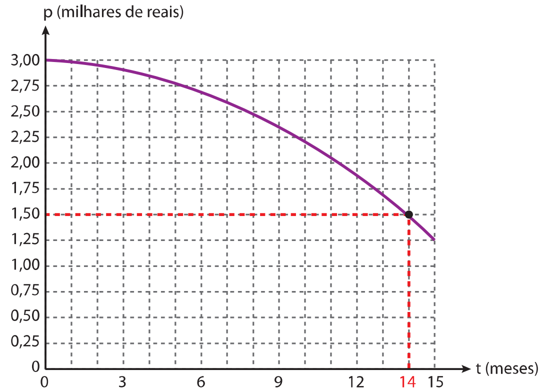
e) Incorreto
As informações não são suficientes para se determinar o valor de f(4). Logo, não se pode afirmar que f(4) = 3.

05.07. Se A = {2, 3, 4} é o domínio da função f(x) = x + 1, então, Im(f) = {f(2), f(3), f(4)}.
Mas

f(2) = 2 + 1 = 3,
f(3) = 3 + 1 = 4
e
f(4) = 4 + 1 = 5.

Assim sendo, temos que Im(f) = {3, 4, 5}.

05.08.



Observando o gráfico, conclui-se facilmente que:

- $t=0 \Rightarrow p=300=$ preço de lançamento;
- $t=14 \Rightarrow p=150=50\%$ de 300;
- $0<t<14 \Rightarrow p>150$
- $t>14 \Rightarrow p<150$

Portanto, o preço do aparelho será menor do que 50% do valor de lançamento a partir do 14º mês.

05.09. A população da espécie **A** aumenta 20% ao ano. Portanto, o aumento é maior a cada ano. Esse tipo de crescimento está melhor representado pelo gráfico **III**.
A espécie **B** aumenta sempre 100 pássaros ao ano, ou seja, é sempre o mesmo aumento a cada ano. Esse tipo de crescimento corresponde ao gráfico **II**.
A espécie **C** permanece estável (não aumenta e não diminui) ao longo dos anos, conforme representado no gráfico **I**.
Portanto, as evoluções das populações das espécies **A**, **B** e **C**, ao longo do tempo, correspondem, respectivamente, aos gráficos **III**, **II** e **I**.

05.10. Seja m(12) a massa, em kg, de um bebê de 12 meses.
De acordo com o gráfico, a massa esperada para um bebê de 12 meses, que esteja se desenvolvendo bem, é tal que
8,8 < m(12) < 12,2.
Portanto, a menor massa corpórea esperada, nesse caso, é 8,8 kg.

05.11.

$$f(x)=x^2+100 \Rightarrow f(-x)=(-x)^2+100=x^2+100$$

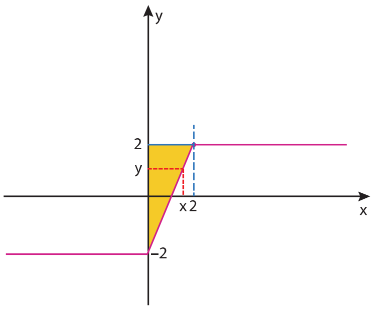
Ou seja:

$$f(x)=x^2+100 \Rightarrow f(x)=f\big(-x\big) \Rightarrow f(\pm x)=x^2+100$$

$$f(x)=x^2+100 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0+100=100 \\ f(-10)=f(10)=100+100=200 \\ f(-20)=f(20)=400+100=500 \\ f(-30)=f(30)=900+100=1000 \end{cases}$$

Se o domínio da função $f(x)=x^2+100$ é o conjunto $A=\{-30;-20;-10;0;10;20;30\}$, então
$Im(f)=\{f(0); f(\pm10); f(\pm20); f(\pm30)\} \Rightarrow Im(f)=\{100; 200; 500; 1000\}$

05.12. a) Correto



Pela semelhança de triângulos:

$\frac{y+2}{4}=\frac{x}{2} \Rightarrow y+2=2x \Rightarrow y=2x-2$. Ou seja:

$0 \le x \le 2 \Rightarrow f(x)=2x-2$

b) Incorreto

$f(x)=-2$, se $x \le 0$

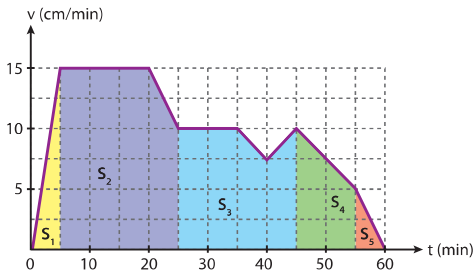
c) Incorreto

$f(x)=2$, se $x \ge 2$

d) Incorreto

$f(0)=-2 \Rightarrow f(x)=-2$, se $x=0$.

05.13. Sabe-se que a área sob a curva é numericamente igual ao deslocamento total no intervalo de tempo considerado.
Considere a figura a seguir para calcular a soma das áreas das regiões destacadas.



- $S_1=\frac{5\cdot15}{2}=\frac{75}{2}$
- $S_2=20\cdot15-\frac{5\cdot5}{2}=300-\frac{25}{2}$
- $S_3=20\cdot10-\frac{10\cdot\frac{5}{2}}{2}=200-\frac{25}{2}$
- $S_4=\frac{(10+5)\cdot10}{2}=75$
- $S_5=\frac{5\cdot5}{2}=\frac{25}{2}$

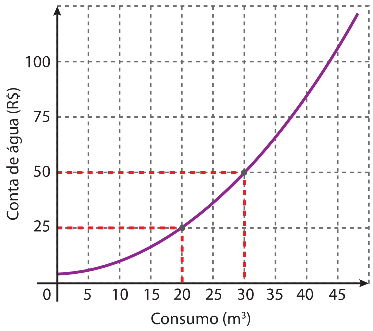
$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{75}{2}+\left(300-\frac{25}{2}\right)+\left(200-\frac{25}{2}\right)+75+\frac{25}{2}$

$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{75}{2}-\frac{25}{2}+575$

$S_1+S_2+S_3+S_4=600 \Rightarrow$ Deslocamento $=600$ cm

600 cm $=6$ m $\Rightarrow$ Deslocamento $=6$ m

05.14. O valor da conta deve ser reduzido à metade, ou seja, passar de dos atuais R$ 50,00 para R$ 25,00. Para que ocorra essa redução no valor da conta, o consumo deve passar dos atuais 20 m^3 para 20 m^3, conforme indicado no gráfico:



Portanto, a redução no consumo deve ser de 10 m^3.

05.15. a) Incorreto

De 2008 para 2009 o crescimento foi de 2,4 – 1,2 = 1,2 milhões de reais.

b) Incorreto

Em 2009 as vendas dobraram em relação a 2008.

c) Incorreto

De 2009 para 2010 as vendas dobraram.

d) Correto

4,8 – 2,4 = 2,4milhões de reais.

e) Incorreto

9,6 – 2,4 = 7,2 milhões de reais.

05.16. 01) Correto

$\frac{(600-200)\,m}{(4-0)\,min}=\frac{400\,m}{4\,min}=\frac{100\,m}{1\,min}=\frac{6000\,m}{60\,min}=6\,km/h$

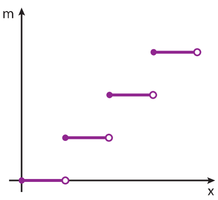
02) Correto

d = 1000 m para todo total que 6 min ≤ t ≤ 8 min ⇒ a esteira permaneceu parada durante 2 minutos.

03) Correto

1400 m – 200 m = 1200 m.

05.17. Como **m** indica o número de voltas completas, todas de mesmo comprimento, o valor de **m** cresce de 1 em 1 e essas variações são contabilizadas apenas nos instantes em que cada volta é completada. Entre o início e o término de uma volta qualquer, o valor de **m** permanece constante, conforme indicado no gráfico a seguir:



05.18. O gráfico indica 5 momentos distintos:

A distância, em relação à casa, aumenta com velocidade crescente à medida que o tempo passa (indicando um movimento acelerado);

Em seguida, a distância em relação à casa permanece constante por um determinado período de tempo (velocidade nula);

A distância, em relação à casa, diminui de maneira constante, até ser igual a zero (indicando retorno para a casa com velocidade constante);

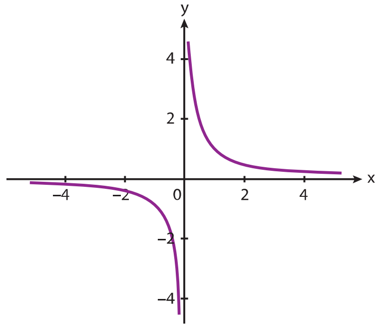
A distância, em relação à casa, mantem-se igual a zero por um período de tempo;

A distância, em relação à casa, aumenta de forma constante (indicando deslocamento com velocidade constante).

Das alternativas apresentadas, a que apresenta a história que melhor se adapta ao gráfico é a alternativa b.

05.19. I. Incorreto; II. Correto

Esboço do gráfico:



A função f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, é decrescente em todo o seu domínio. Portanto, analisando as afirmações, temos que:

– é **INCORRETO** afirmar que essa função é crescente para $x < 0$;

– é **CORRETO** afirmar que essa função é decrescente para $x > 0$.

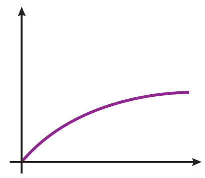
05.20. a) $D(f) = \mathbb{R}_+$

Se a função está definida no campo dos reais e $f(x) = \sqrt{x}$, então x não pode assumir valores negativos. Ou seja:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$. Ou, de forma equivalente, podemos escrever:

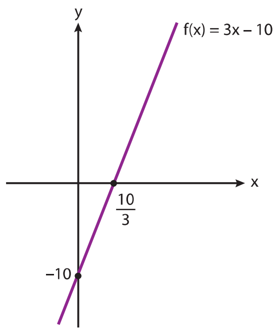
$$D(f) = \mathbb{R}_+$$

b)



Aula 06

06.01. Observe a figura a seguir:



a) Incorreto

O gráfico não passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas, pois $f(0) = 3 \cdot 0 - 10 \Rightarrow f(0) = -10$.

b) Incorreto

O gráfico intersecta o eixo das abscissas no ponto $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$.

c) Correto

$f(0) = -10 \Rightarrow (0, -10)$ é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas.

d) Incorreto

A função é crescente.

e) Incorreto

A função é crescente.

06.02. a) Incorreto

$y = f(x) = -3x + 8 \Rightarrow 2y = 2 \cdot (-3x + 8) \Rightarrow 2y = -6x + 16$

$f(x) = -3x + 8 \Rightarrow f(2x) = -3 \cdot 2x + 8 \Rightarrow f(2x) = -6x + 8 \neq 2y$

b) Incorreto

$y = f(x) = -3x + 8 \Rightarrow 3y = 3 \cdot (-3x + 8) \Rightarrow 3y = -9x + 24$

$f(x) = -3x + 8 \Rightarrow f(3x) = -3 \cdot 3x + 8 \Rightarrow f(3x) = -9x + 8 \neq 3y$

c) Incorreto

$y = f(x) = -3x + 8$

$f(x+1) = -3 \cdot (x+1) + 8 \Rightarrow f(x+1) = (-3x + 8) - 3$

$f(x+1) = y - 3$

Aumentando o valor de **x** de 1 em 1, o valor de **y** diminui de 3 em 3.

d) Correto

Conforme justificado o item anterior.

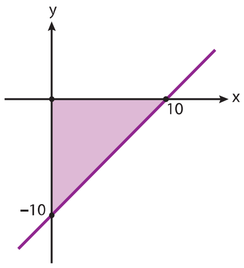
e) Incorreto

$f(0) = -3 \cdot 0 + 8$

$f(0) = 8$

Portanto, o gráfico dessa função não passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas.

06.03. O gráfico da função f(x) = x − 10 é uma reta que intersecta os eixos coordenados nos pontos (0, 10) e (10, 0), e forma com os eixos coordenados um triângulo retângulo, conforme indicado na figura a seguir.



A área desse triângulo, em unidades de área, é igual a $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$.

06.04.

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{120-110}{1} = 10 \Rightarrow$ a taxa de crescimento dessa função é igual a 10.

06.05. y = ax + b, com a = 10 (taxa de crescimento), donde segue que:

$$y = 10x + b$$

$$f(0) = 100 \Rightarrow 10 \cdot 0 + b = 100 \Rightarrow b = 100$$

Portanto, a lei de formação da função é y = 10x + 100.

06.06. O gráfico da função afim f(x) = ax + b intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 10). Então, b = 10, pois

$f(0) = 10 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 10 \Rightarrow b = 10.$

Esse gráfico intersecta o eixo das abscissas no ponto (2, 0), ou seja, f(2) = 0. Portanto:

$$\begin{cases} f(x) = ax + 10 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot 2 + 10 = 0 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow f(x) = -5x + 10$$

06.07.

$$\begin{cases} N = 1{,}25c + 7 \\ N = 44 \end{cases} \Rightarrow 44 = 1{,}25c + 7 \Rightarrow 37 = 1{,}25c \Rightarrow c = 29{,}6 \text{ cm}$$

06.08.

Não é única a função afim cujo gráfico passa pelo ponto (2, 3) e forma, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo com 12 unidades de área.

Para simplificar a resolução, vamos verificar as opções apresentadas.

Verifique que f(2) = 3 para todas as funções apresentadas como opção de resposta. Ou seja, os gráficos correspondentes passam pelo ponto (2, 3).

Nos resta verificarmos a área do referido triângulo retângulo.

a) Incorreto

$$f(x) = 5 - x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 5 \\ f(5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Área} = \frac{5 \cdot 5}{2} \neq 12$$

b) Correto

$$f(x) = 6 - \frac{3}{2}x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 6 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Área} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

c) Incorreto

$$f(x) = 8 - \frac{5}{2}x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 8 \\ f(3{,}2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Área} = \frac{8 \cdot 3{,}2}{2} \neq 12$$

d) Incorreto

$$f(x) = 7 - 2x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 7 \\ f(3{,}5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Área} = \frac{7 \cdot 3{,}5}{2} \neq 12$$

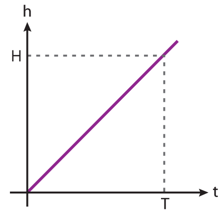
e) Incorreto

$$f(x) = 9 - 3x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 9 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Área} = \frac{9 \cdot 3}{2} \neq 12$$

06.09. 01

Se a vazão é constante, de **k** litros por minuto, então a variação da altura é diretamente proporcional ao tempo em que o reservatório permanece sendo abastecido, por essa vazão, até ficar completamente cheio, pois esse reservatório tem a forma de um cilindro circular reto.

Em outras palavras, em intervalos de tempos iguais o reservatório recebe volumes iguais de água, o que proporciona acréscimos iguais no seu nível da água (altura). Ou seja, a função **h(t)**, do nível da água no reservatório a cada instante **t**, é uma função afim. Portanto, o gráfico correspondente é uma reta crescente (pois o reservatório está sendo abastecido), e, dentre aqueles que foram apresentados, o gráfico que melhor representa **h(t)** é:



06.10.

$$A = kv + b$$

$$\begin{cases} v = 40 \Rightarrow A = 100 \\ v = 120 \Rightarrow A = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40k + b = 100 \\ 120k + b = 30 \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{7}{8} \text{ e } b = 135$$

$$k = -\frac{7}{8} \text{ e } b = 135 \Rightarrow A = -\frac{7}{8}v + 135$$

$$\begin{cases} A = -\frac{7}{8}v + 135 \\ v = 64 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{7}{8} \cdot 64 + 135 \Rightarrow A = 79°$$

06.11.

$$y = ax + b$$

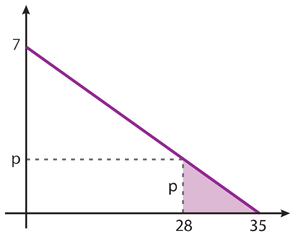
$$\begin{cases} x = 720 \Rightarrow y = 10 \\ x = 1020 \Rightarrow y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 720x + b = 10 \\ 1020x + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{60} \text{ e } b = 22$$

$$a = -\frac{1}{60} \text{ e } b = 22 \Rightarrow y = -\frac{1}{60}x + 22$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{60}x + 22 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow 6 = -\frac{1}{60}x + 22 \Rightarrow x = 960$$

06.12.

Observe a figura a seguir, onde **p** indica qual deve ser preço, em reais, para que sejam vendidas 28 unidades por dia.



Da semelhança entre o triângulo retângulo destacado e o triângulo retângulo de catetos 7 e 35, temos que:

$$\frac{p}{7}=\frac{35-28}{35} \Rightarrow \frac{p}{7}=\frac{7}{35} \Rightarrow p=\frac{7}{5} \Rightarrow p=1{,}4$$

06.13. 6

$$\begin{cases} f(x)=ax+b \\ f(1)=-9 \end{cases} \Rightarrow a\cdot 1+b=-9 \Rightarrow a+b=-9$$

$$\begin{cases} a+b=-9 \\ b^2-a^2=54 \end{cases} \Rightarrow (b-a)(b+a)=54 \Rightarrow (b-a)\cdot(-9)=54 \Rightarrow b-a=-6$$

$$b-a=-6 \Rightarrow a-b=6$$

06.14.

$$y=ax+b$$

$$\begin{cases} x=20 \Rightarrow y=50 \\ x=15 \Rightarrow y=75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20a+b=50 \\ 15a+b=75 \end{cases} \Rightarrow a=-5 \text{ e } b=150$$

$$a=-5 \text{ e } b=150 \Rightarrow y=-5x+150$$

06.15. 99

$$f(x)=mx+n$$

$$\begin{cases} f(5)=0 \\ f(-2)=-63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m+n=0 \\ -2m+n=-63 \end{cases} \Rightarrow m=9 \text{ e } n=-45$$

$$m=9 \text{ e } n=-45 \Rightarrow f(x)=9x-45$$

$$f(x)=9x-45 \Rightarrow f(16)=9\cdot 16-45 \Rightarrow f(16)=99$$

06.16. Considerando a função $f(x) = ax + b$, temos que:

- $a < 0$, pois a função é decrescente;
- $f(a) = 2b \Rightarrow a^2 + b = 2b \Rightarrow b = a^2$;
- $f(b)=2a \Rightarrow a\cdot b+b=2a \Rightarrow b=\frac{2a}{a+1}$.

Portanto:

$$\begin{cases} b=a^2 \\ b=\frac{2a}{a+1} \end{cases} \Rightarrow a^2=\frac{2a}{a+1} \Rightarrow a=\frac{2}{a+1} \Rightarrow a^2+a-2=0$$

$$\begin{cases} a^2+a-2=0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a=-2$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=a^2 \end{cases} \Rightarrow b=4 \Rightarrow f(x)=-2x+4$$

$$f(x)=-2x+4 \Rightarrow f(3)=-2\cdot 3+4 \Rightarrow f(3)=-2$$

06.17.

- Pacientes atendidos no ambulatório:

$$f(t)=a\cdot t+b$$

$$\begin{cases} f(1)=16 \\ f(2)=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=16 \\ 2a+b=17 \end{cases} \Rightarrow a=1 \text{ e } b=15 \Rightarrow f(t)=t+15$$

- Pacientes internados na área restrita:

$$g(t)=a\cdot t+b$$

$$\begin{cases} g(1)=5 \\ g(2)=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 2a+b=7 \end{cases} \Rightarrow a=2 \text{ e } b=3 \Rightarrow g(t)=2t+3$$

a) Correto

$g(t) > f(t) \Rightarrow 2t + 3 > t + 15 \Rightarrow t > 12$

b) Incorreto

Após o 12º dia, o número de pacientes atendido no ambulatório é menor que o número de pacientes internados em área restrita.

c) Incorreto

$f(8) - g(8) = (8 + 15) - (2 \cdot 8 + 3) = 23 - 19 = 4 < 7$

d) Incorreto

O número de pacientes atendidos no ambulatório só é menor a partir do 12º dia, conforme vimos na alternativa (a).

06.18. 17 (01, 16)

Considerando que A(x) e B(x) indicam os valores, em reais, cobrados pelas empresas A e B, respectivamente, por x minutos em ligações, temos que:

$A(x) = 19{,}90 + 0{,}15x$ e $B(x) = 29{,}90 + 0{,}05x$

01) Correto

$79{,}90 = 29{,}90 + 0{,}05x \Rightarrow x = 1000 \text{ min} > 950 \text{ min}$

02) Incorreto

$A(300) = 19{,}90 + 0{,}15 \cdot 300 = 64{,}90$ reais

04) Incorreto

$0{,}15 > 0{,}05 \Rightarrow$ a taxa de crescimento da função A(x) é maior do que a da função B(x). Isso indica que, a partir de um determinado valor de x, teremos $A(x) > B(x)$. De fato:

$A(x) > B(x) \Rightarrow 19{,}90 + 0{,}15x > 29{,}90 + 0{,}05x \Rightarrow x > 100$

Ou seja, Se João e Maria fizerem sempre a mesma quantidade de ligações (em minutos), então o valor da conta de João será maior do que a de Maria sempre que utilizarem mais do que 100 minutos em ligações.

08) Incorreto

Consideremos que fazer duas vezes mais minutos em ligações é o mesmo que fazer o dobro de minutos em ligações.

Se João utilizar **x** minutos em ligações e Maria, **2x** minutos, então Maria deverá pagar uma fatura no valor de 29,90 + 0,1x reais. Observe:

$$B(x)=29{,}90+0{,}05x$$

$$B(2x)=29{,}90+0{,}05\cdot 2x \Rightarrow B(2x)=29{,}90+0{,}1x$$

$0{,}15 > 0{,}1 \Rightarrow A(x) > B(2x)$ para algum valor de x. Ou seja, nem sempre que Maria utilizar o dobro de minutos em ligações que João o valor da conta dela será maior do que o valor da conta dele.

Se preferir, faça a seguinte verificação:

$19{,}90 + 0{,}15x > 29{,}90 + 0{,}1 \Rightarrow x > 200 \Rightarrow$

sempre que João utilizar mais do que 200 minutos em ligações, o valor da sua conta será maior do que o valor da conta de Maria, mesmo se ela utilizar o dobro de minutos utilizados por ele.

16) Correto

Conforme demonstrado no item (04), o plano da empresa A é mais barato do que o plano da empresa B sempre que se utiliza menos do que 100 minutos em ligações.

06.19. $S = 4{,}5 \cdot h - 60$

Se o operário trabalhar **h** horas em uma determinada semana, com $h \geq 40$, então fará $h - 40$ horas extras, pois 40 horas fazem parte da jornada semanal regular de trabalho.

Esse operário ganha:

- R$ 3,00 por cada uma das 40 horas de sua jornada regular de trabalho;
- R$ 3,00 + R$ 1,50 = R$ 4,50 por cada uma das (40-h) horas extras que trabalhar.

Se **S** expressar o salário bruto semanal, em reais, desse operário, na semana em que ele trabalhar h horas ($h \geq 40$), então:

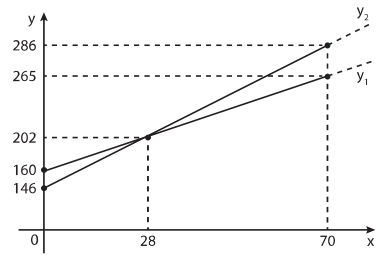
$$S = 3 \cdot 40 + 4{,}5 \cdot (h - 40)$$

$$S = 120 + 4{,}5 \cdot h - 180$$

$$S = 4{,}5 \cdot h - 60$$

06.20. a) Sejam x a quantidade de quilômetros percorridos, y_1 a tarifa cobrada pela empresa *ViajeBem* e y_2 a tarifa cobrada pela empresa *AluCar*.

O gráfico esboçado a seguir representa as duas funções das tarifas diárias cobradas pelas duas empresas, no intervalo [0; 70].



*O gráfico esboçado acima não está em escala

b) Sendo x a quantidade de quilômetros percorridos, y_1 a tarifa cobrada pela empresa *ViajeBem* e y_2 a tarifa cobrada pela empresa *AluCar*, temos as seguintes expressões algébricas para as tarifas cobradas por essas empresas:

$y_1 = 160 + 1{,}5x$ e $y_2 = 146 + 2x$.

Igualando as duas expressões:

$y_2 = y_1$

$146 + 2x = 160 + 1{,}5x$

$2x - 1{,}5x = 160 - 146$

$0{,}5x = 14.$

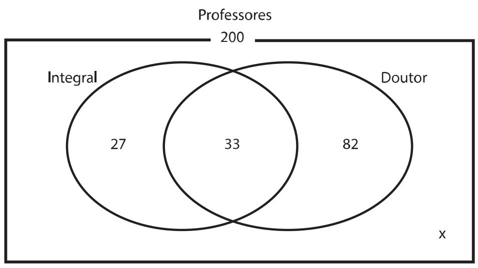
$x = \mathbf{28}$

Portanto, o valor cobrado é o mesmo para 28 km percorridos.

Aula 04

04.01. Se $n(X) = 20$ e $n(Y) = 7$, então $20 \le n(X \cup Y) \le 27$ e $0 \le n(X \cap Y) \le 7$.
Se $X \cap Y = \varnothing$, então $X - Y = X$.
Se $X \cap Y \ne \varnothing$, então $13 \le n(X - Y) \le 19$.

04.02. As informações do problema podem ser organizadas na seguinte ilustração:



O número de professores da universidade que não dedicam tempo integral e não são doutores, representado por **x**, é dado por:
$82 + 33 + 27 + x = 200$
$x = 58$

04.03. **a) Falsa**
Q é o conjunto de todas as frações cujos numeradores são inteiros e cujos denominadores são inteiros não nulos.
b) Falsa
$Q^C \cap Q = \varnothing$
c) Falsa
$2 \in Q$, ou seja, $2 \notin Q^C$.
d) Verdadeira
$Q^C \cap Q = \varnothing$
e) Falsa
$Q \subset R$

04.04. a) $\sqrt{4} = 2 \in Q$

b) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \in Q$

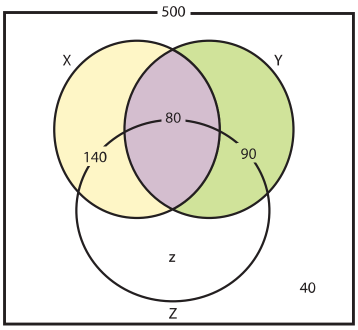
c) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \in Q$

d) $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4} \notin Q$

e) $\sqrt[6]{1000000} = \sqrt[6]{10^6} = 10 \in Q$

04.05. **I. Verdadeira**
O número 2,325666... é racional, pois possui representação decimal infinita e periódica.
II. Falsa
O número $\sqrt{7}$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, na qual p e q são inteiros, com $q \ne 0$, pois $\sqrt{7}$ é irracional.
III. Falsa
$$m = \frac{\sqrt{(-3)^2}}{3} = \frac{\sqrt{9}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

04.06. Sendo **z** a quantidade de entrevistados que leem somente **Z**, tem-se:



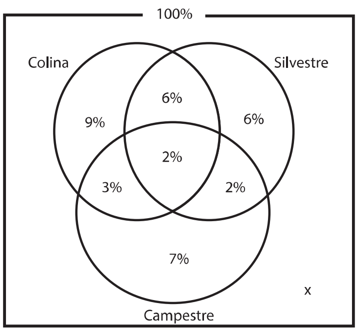
Desta forma, tem-se:
$140 + 80 + 90 + z + 40 = 500$
$350 + z = 500$
$z = 150$
Portanto, 150 entrevistados leem apenas **Z**.

04.07. Para quaisquer valores inteiros de **a** e **b** os seguintes valores não são necessariamente inteiros: $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$ e a^b.

04.08. **I. Verdadeira**
Se $\mathbf{0} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{1} \in \mathbf{A}$, então $\mathbf{0 \cdot 1 = 0} \in \mathbf{A}$.
Logo, o conjunto $A = \{0, 1\}$ é fechado pela multiplicação.
II. Verdadeira
Dados dois números naturais, **a** e **b**, se $\mathbf{a^2} \in \mathbf{B}$ **e** $\mathbf{b^2} \in \mathbf{B}$, então $\mathbf{a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2} \in \mathbf{B}$.
Em outras palavras, pode-se dizer que o produto de dois quadrados perfeitos é também quadrado perfeito.
III. Falsa
Temos, por exemplo, que $\mathbf{1} \in \mathbf{C}$, $\mathbf{6} \in \mathbf{C}$ e $\mathbf{1 + 6 = 7} \notin \mathbf{C}$.
Logo, o conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ não é fechado pela adição.

04.09. $A = \{x \in N$ tal que $-3 \le x \le 3\}$
$A = \{0, 1, 2, 3\}$
- $B = \{x \in Z$ tal que x é divisor ímpar de $18\}$
$B = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$
- $A - B = \{0, 1, 2, 3\} - \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$
$A - B = \{0, 2\}$

04.10. As informações do problema podem ser organizadas nos seguintes diagramas:



Sendo **x** o percentual de pessoas que não frequentam qualquer um dos clubes, tem-se:

$9\% + 6\% + 2\% + 3\% + 6\% + 2\% + 7\% + x = 100\%$

$35\% + x = 100\%$

$x = 100\% - 35\%$

$x = 65\%$

Desta forma, a quantidade de pessoas que não frequentam qualquer um dos clubes é igual a 65% de 40000, ou seja:

$0{,}65 \cdot 40000 = 26000$

04.11. **01) Verdadeira**

O conjunto $A \cap B$ é constituído por todos os números reais que pertencem simultaneamente ao conjunto **A** e ao conjunto **B**. Logo: $A \cap B = [3, 5[$.

02) Falsa

$\{3, 6\} \not\subset A$, pois $6 \notin A$.

04) Verdadeira

$-5 \in A$, pois o conjunto **A** é formado por todos os números reais menores que 5.

08) Verdadeira

$3 \in B$, pois o conjunto **B** é formado por todos os números reais maiores que ou iguais a 3.

16) Falsa

O conjunto união de **A** com **B** é constituído por todos os números reais, ou seja, $A \cup B =]-\infty, \infty[= \mathbf{R}$.

04.12. **01) Verdadeira**

Todo número decimal infinito periódico é racional:

$$0{,}5222... = 0{,}5 + 0{,}0222... = \frac{5}{10} + \frac{2}{90} = \frac{47}{90}$$

02) Falsa

O quadrado do número irracional $\sqrt[3]{2}$, por exemplo, também é irracional:

$$(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \in \mathbf{I}$$

04) Verdadeira

O produto de irracionais pode ser racional. Por exemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbf{Q}$$

08) Falsa

O número real $\sqrt{3}$ não pode ser escrito sob a forma $\frac{a}{b}$, onde **a** e **b** são inteiros e $b \neq 0$, pois $\sqrt{3}$ é um número irracional.

16) Falsa

Nem toda raiz de uma equação algébrica do 2º grau é um número real. Por exemplo, as duas raízes da equação $x^2 + 1 = 0$ não são reais.

04.13. **a) Falsa**, pois $P(A \cap B) = \{\varnothing, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$.

b) Verdadeira, pois $C_A^B = A - B = \{3, 7\}$.

c) Verdadeira, pois $P(C_A^B) = \{\varnothing, \{3\}, \{7\}, \{3, 7\}\}$.

d) Verdadeira, pois $A \cap B = \{1, 5\}$.

e) Verdadeira, pois $n(A \cup B) = 4$ e, portanto, $n[P(A \cup B)] = 2^4 = 16$

04.14. **I. Falsa**

O número **x** é racional, pois a correspondente representação decimal é finita.

II. Falsa

$x = 3{,}333...3222...2 < 3{,}333...$

III. Verdadeira

O número $x \cdot 10^{2.000.000}$ é um número inteiro cujo algarismo das unidades é igual a 2.

04.15. **a) Falsa**

A igualdade $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ é válida apenas se $a = 0$ ou $b = 0$.

b) Falsa

Se $a^2 - b^2 = 0$, então $a = b$ ou $a = -b$.

c) Falsa

Sendo **a** um número real, a igualdade, $\sqrt{a^2} = a$, é válida somente se $a \geq 0$.

d) Falsa

Para $a = -1$ e $b = 1$, por exemplo, tem-se $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

e) Verdadeira

Se $a < 1$, então, elevando ao cubo ambos os membros, tem-se:

$a^3 < 1$

$a^3 - 1 < 0$

Multiplicando membro a membro por $a > 0$, tem-se:

$a \cdot (a^3 - 1) < a \cdot 0$

$a^4 - a < 0$

$a^4 < a$

$(a^2)^2 < (\sqrt{a})^2$

$a^2 < \sqrt{a}$

Logo, qualquer que seja o número real **a**, com $\mathbf{0 < a < 1}$, é verdadeiro que $a^2 < \sqrt{a}$.

04.16. **01) Verdadeira**

Para **a**, **b**, **c** e **d**, inteiros, em que **b** e **d** não são nulos, tem-se:

$$\frac{a}{b} \in Q \text{ e } \frac{c}{d} \in Q \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in Q$$

Logo, o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

02) Verdadeira

Sejam **a** um número inteiro não nulo, **b** um número irracional e **c** um número real.

Vamos analisar a igualdade $a \cdot b = c$ e verificar se **c** é racional ou irracional.

Se **c** fosse racional, então $b = \frac{c}{a}$ representaria um quociente de números racionais. Mas **b** é irracional, de modo que **c** não pode ser racional. A conclusão é a de que **c** é necessariamente um número irracional.

Portanto, se **a** é inteiro não nulo e **b** é irracional, então $a \cdot b$ é um número irracional.

04) Falsa

Por exemplo, $\sqrt[3]{2}$ é irracional e $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ também é irracional.

Logo, o quadrado de um número irracional pode ser racional.

08) Verdadeira

Sejam $a \in N$ e $k \in N$, de modo que $a^2 = 2k$, então:

$a \cdot a = 2k$

Se o produto de dois números naturais ímpares resulta em número ímpar, necessariamente **a** deve ser par, uma vez que o produto de números naturais pares resulta em um número par.

16) Verdadeira

O conjunto dos múltiplos inteiros de 17 é igual a $\{0, \pm 17, \pm 34, \pm 51, \pm 68, ...\}$.

Como 17 é um número ímpar, quando se multiplica 17 por um número par, resulta em um múltiplo de 34, mas quando se multiplica 17 por um número ímpar, resulta em um número ímpar. Desta forma, todo múltiplo de 17 é um número ímpar ou múltiplo de 34.

32) Falsa

Por exemplo, 3 e 5 são primos mas $3 + 5 = 8$ não é primo, pois é divisível por 2.

64) Falsa

Se o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos é igual a 1, então esses números são primos entre si. Por exemplo, 8 e 9 não são individualmente número primos, mas são primos entre si, pois o único divisor natural comum que possuem é igual a 1.

04.17. 01) Falsa

$$\sqrt{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{16}{25}}}=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{5}{5}}=\sqrt{1}=1\notin \mathbf{I}$$

02) Falsa

Por exemplo, $\sqrt[3]{5}$ é irracional e $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$ também é irracional.

04) Verdadeira

Se $-\sqrt{15}<x<\sqrt{12}$, com **x** inteiro, então

$-\sqrt{15}<-\sqrt{9}=-3\leq x\leq 3=\sqrt{9}<\sqrt{12}$.

Portanto, $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, ou seja, existem 7 números inteiros entre $-\sqrt{15}$ e $\sqrt{12}$.

08) Verdadeira

Sabe-se que $1 < x < 2$ (I) e $-6 < y < -3$ (II).

Multiplicando por $-\frac{1}{3}$ a equação (II), tem-se:

$$-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)<y\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)<-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$1<-\frac{y}{3}<2 \quad \text{(III)}$$

Fazendo (I) + (III), tem-se:

$$1+1<x-\frac{y}{3}<2+2$$

$$2<x-\frac{1}{3}y<4$$

16) Falsa

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3\cdot 2]{4^2}=\sqrt[6]{16}<\sqrt{3}=\sqrt[2\cdot 3]{3^3}=\sqrt[6]{27}$$

32) Falsa

$4,7\cdot 10^{-4}=0,47\cdot 10^{-3}<7,4\cdot 10^{-3}$

04.18. a) Falsa

Se $A=\varnothing$, por exemplo, pode-se ter $A\cap B=A\cap C$, com $B\neq C$.

b) Falsa

Se **A** possui **m** elementos e **B** possui **n** elementos, então a quantidade de elementos do conjunto $A\cup B$ é igual a:

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$n(A\cup B) = m + n - n(A\cap B)$

Portanto, $n(A\cup B) = m + n$ apenas quando $n(A\cap B) = 0$.

c) Verdadeira

Observe que $\varnothing$ é elemento de **A** e $\varnothing$ também é subconjunto vazio de **A**, ou seja, $\varnothing\in A$ e $\varnothing\subset A$.

d) Falsa

Se $\mathbf{C_U X}$ é o complementar do conjunto **X** em relação a **U**, então $\mathbf{C_U X}=U-X$.

Se **A** e **B** são conjuntos quaisquer num universo **U**, então $A\subset U$ e $B\subset U$.

Portanto, nesse caso, temos que:

- $C_U(A-B)=U-(A-B)=(U-A)\cup B$;
- $(C_U A)\cap B=(U-A)\cap B$.

Em geral, $(U-A)\cup B\neq(U-A)\cap B$.

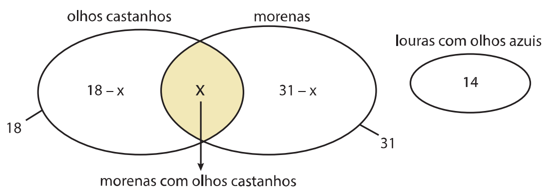
e) Falsa

Se **A** possui 7 elementos, então o conjunto formado por todos os subconjuntos de **A** possui $2^7 = 128$ elementos. Porém, excluindo-se o conjunto vazio, tem-se $128 - 1 = 127$ subconjuntos não vazios de **A.**

04.19. I. $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow(\nexists x\in U, x\in A \text{ e } x\in B)\Leftrightarrow(\forall x\in U, x\in B\Rightarrow x\notin A)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\forall x\in U, x\in B\Rightarrow x\in A^C)\Leftrightarrow B\subset A^C$

II. $B\backslash A^C=\{x\in U, x\in B \text{ e } x\notin A^C\}=\{x\in U, x\in B \text{ e } x\in A\}=B\cap A$

04.20. Vamos ilustrar por meio de diagramas as quatro categorias possíveis de pessoas: morenas com olhos azuis, morenas com olhos castanhos, louras com olhos azuis e louras com olhos castanhos.



Se o grupo foi composto por 50 pessoas, então:

$(18 - x) + x + (31 - x) + 14 = 50$

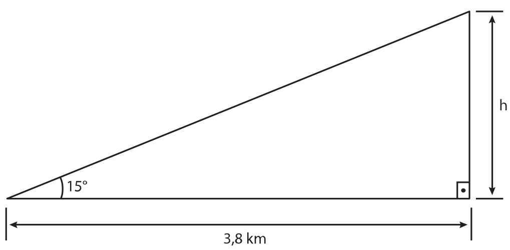
$63 - x = 50$

$x = 13$

Portanto, existem 13 pessoas morenas com olhos castanhos.

Aula 05

05.01. Observe o triângulo:



Utilizando a razão tangente no ângulo de 15°, tem-se:

$$\tan(15°)=\frac{h}{3,8}\ \rightarrow\ h=3,8\cdot\tan(15°)\text{ km}$$

05.02. Sendo **h** a medida da altura da torre, em metros, utilizando a razão tangente, tem-se:

$$\text{tg}\,30°=\frac{h}{30}$$

$$h=30\cdot\text{tg}\,30°$$

$$h=30\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h=10\sqrt{3}\text{ m}$$

05.03. Nas figuras, **c** é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de medidas **a** e **b**. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, $\mathbf{c^2=a^2+b^2}$.

05.04. Sendo **x** a medida da distância do Sítio ao povoado de Santa Rita, em km, utilizando a razão cosseno, tem-se:

$$\cos 60° = \frac{30}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{x}$$

$$x = 60 \text{ km}$$

05.05. Sendo **x** a medida do comprimento da rampa, em metros, utilizando a razão seno, tem-se:

$$\text{sen}\, 30° = \frac{6}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{x}$$

$$x = 12 \text{ m}$$

05.06. Aplicando Pitágoras em **BAC**, tem-se:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

Aplicando Pitágoras em **BCD**, tem-se:

$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 = 5 + 1^2 = 6$

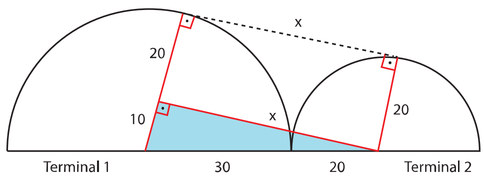
Aplicando Pitágoras em **BDE**, tem-se:

$(BE)^2 = (BD)^2 + (DE)^2 = 6 + 1^2 = 7$

$BE = \sqrt{7}$ cm

05.07. Utilizando a razão seno, conclui-se que a altura do prédio é igual à metade da distância entre os pontos **A** e **B**, adicionada à medida da altura do homem, de modo que a altura do prédio é igual a 38,3 m + 1,7 m = 40 m.

05.08. Observe a figura:



Utilizando o teorema de Pitágoras, no triângulo destacado, tem-se:

$50^2 = 10^2 + x^2$

$x^2 = 2400$

$x = 20\sqrt{6}$ m

05.09. A inclinação de cada rampa é definida por $\text{tg (i)} = \frac{AC}{AB}$.

Inclinação da rampa 1:

$$\text{tg (i)} = \frac{30 \text{ cm}}{4 \text{ m}} = \frac{0{,}3 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 0{,}075 = 7{,}5\%$$

Logo, será preciso utilizar material antiderrapante, pois 6% < tg(i) < 10%.

Inclinação da rampa 2:

$$\text{tg (i)} = \frac{25 \text{ cm}}{5 \text{ m}} = \frac{0{,}25 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 0{,}05 = 5\%$$

Portanto, não será preciso utilizar material antiderrapante, pois tg(i) < 6%.

Inclinação da rampa 3:

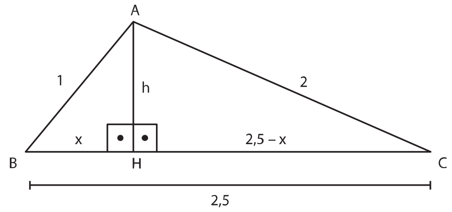
$$\text{tg (i)} = \frac{20 \text{ cm}}{3 \text{ m}} = \frac{0{,}2 \text{ m}}{3 \text{ m}} \cong 0{,}067 = 6{,}7\%$$

Desta forma, será preciso utilizar material antiderrapante, pois 6% < tg(i) < 10%.

Conclusão:

Será preciso utilizar material antiderrapante apenas nas rampas 1 e 3.

05.10. Observe a seguinte figura:



Utilizando Pitágoras nos triângulos retângulos **ABH** e **ACH**, tem-se:

$1^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 1 - x^2$ (I)

$2^2 = (2{,}5 - x)^2 + h^2$ (II)

Substituindo (I) em (II), tem-se:

$4 = 6{,}25 - 5x + x^2 + (1 - x^2)$

$5x = 3{,}25$

$x = 0{,}65$ (III)

Substituindo (III) em (I), tem-se:

$h^2 = 1 - (0{,}65)^2$

$h^2 = 0{,}5775$

$h^2 \cong 0{,}58 \text{ cm}^2$

05.11. Utilizando a razão cosseno no triângulo **ABD**, tem-se:

$$\cos 60° = \frac{BD}{AD}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{AD}$$

AD = 20 m

Pitágoras no triângulo **ABD**:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$

$20^2 = (AB)^2 + 10^2$

$(AB)^2 = 300$

$AB = 10\sqrt{3}$ m

Utilizando a razão seno no triângulo **ABC**, tem-se:

$$\text{sen}\, 30° = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{AC}$$

$AC = 20\sqrt{3}$ m

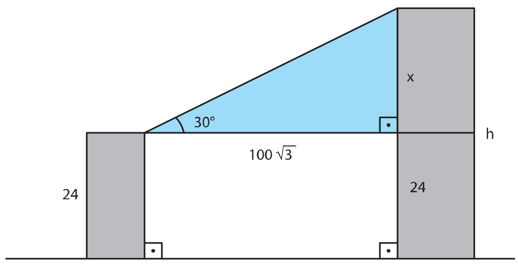
Cálculo da medida $\mathbf{L_1 + L_2}$:

$L_1 + L_2 = 20\sqrt{3} + 20$

$L_1 + L_2 = 20 \cdot 1{,}73 + 20$

$L_1 + L_2 = 54{,}6$ m

05.12. Considere a seguinte ilustração na qual ambos os edifícios são considerados em posições perfeitamente perpendiculares ao plano do solo:



Utilizando a razão tangente no triângulo destacado, tem-se:

$$\text{tg}\, 30° = \frac{x}{100\sqrt{3}}$$

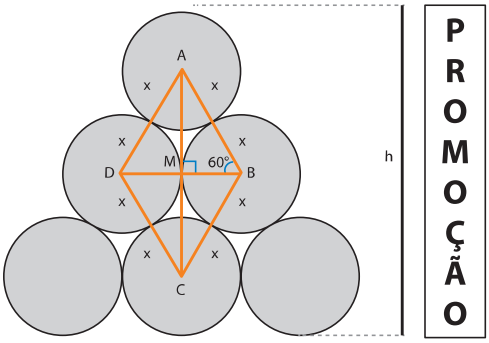
$100\sqrt{3}\cdot \text{tg}\,30° = x$

$100\sqrt{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = x$

$x = 100$ m

Logo, a altura do prédio mais alto é igual a 24 + 100 = 124 m.

05.13. Observe a próxima figura:



No triângulo retângulo **ABM**, tem-se:

$\text{sen}\,60° = \frac{AM}{AB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{2x}$

$AM = x\sqrt{3}$

O quadrilátero **ABCD** é um losango, pois **AB = BC = CD = DA**. Desta forma, $AM = MC = x\sqrt{3}$, de modo que $AC = 2\sqrt{3}\cdot x$. Observando-se que a medida **h** é igual a **AC** adicionada de **2x**, tem-se:

$h = AC + 2x$

$h = 2\sqrt{3}\cdot x + 2x$

$h = 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot x$

$h \cong 2\cdot(1{,}7+1)\cdot x$

$h \cong 5{,}4x$

05.14. Utilizando a razão tangente no triângulo **PAB**, tem-se:

$\text{tg}\,30° = \frac{AB}{PA}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{12}$

$AB = 4\sqrt{3}$

$AB = 4\cdot 1{,}7$

$AB = 6{,}8$ km

Utilizando a razão tangente no triângulo **PAC**, tem-se:

$\text{tg}\,45° = \frac{AC}{PA}$

$1 = \frac{AC}{12}$

$AC = 12$ km

Logo, BC = AC – AB = 12 – 6,8 = 5,2 km

Se a velocidade é igual a 1872 km/h, então o tempo **t**, em horas, para que o avião percorra **BC**, é dado por:

$t = \frac{5{,}2}{1872}\,h$

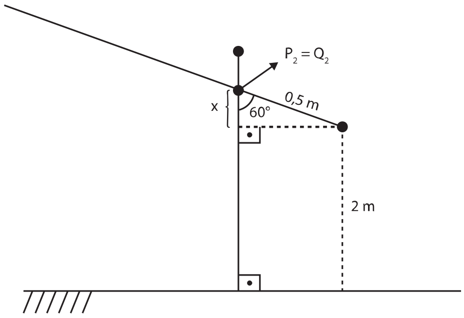
Para obter o tempo em segundos, pode-se multiplicar **t** por 3600:

$t = \frac{5{,}2}{1872}\cdot 3600$ s

$t = 10$ s

Logo, o tempo que esse avião leva para ir de **B** até **C**, é igual a 10 segundos.

05.15. Considere a seguinte ilustração:



Utilizando a razão cosseno no triângulo retângulo da figura, tem-se:

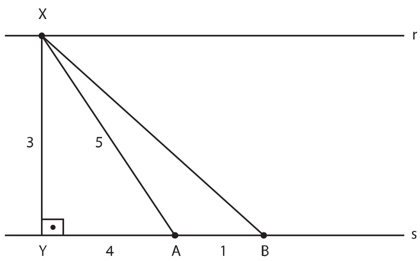
$\cos 60° = \frac{x}{0{,}5}$

$x = 0{,}25$ m

Desta forma, a menor distância dos pontos $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{Q_2}$ em relação ao nível da calçada deve ser:

$2 + x = 2 + 0{,}25 = 2{,}25$ m

05.16. 1ª possibilidade: X está à esquerda do extremo A



• TRIÂNGULO AXY

$(AX)^2 = (XY)^2 + (AY)^2$

$5^2 = 3^2 + (AY)^2$

$16 = (AY)^2$

$AY = 4;\ AY > 0$

• TRIÂNGULO BXY

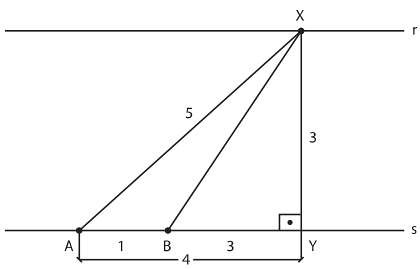
$(BX)^2 = (XY)^2 + (BY)^2$

$(BX)^2 = 3^2 + 5^2$

$(BX)^2 = 34$

$BX = \sqrt{34};\ BX > 0$

2ª possibilidade: X está à direita do extremo B



• TRIÂNGULO AXY

$(AX)^2 = (AY)^2 + (XY)^2$

$5^2 = (AY)^2 + 3^2$

$(AY)^2 = 16$

$AY = 4; AY > 0$

• TRIÂNGULO BXY

$(BX)^2 = (BY)^2 + (XY)^2$

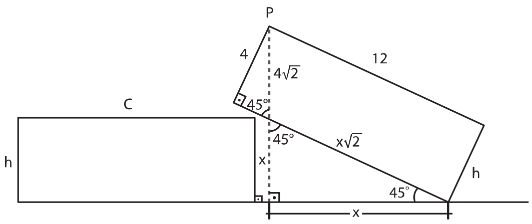
$(BX)^2 = 3^2 + 3^2$

$(BX)^2 = 18$

$BX = 3\sqrt{2}; BX > 0$

Portanto, as possíveis distâncias de **X** ao outro extremo do segmento são $3\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{34}$ cm.

05.17. Considere a seguinte ilustração em que algumas medidas já estão numericamente indicadas:



Se a base inferior do retângulo inclinado mede 12 cm, então:

$$4 + x\sqrt{2} = 12$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

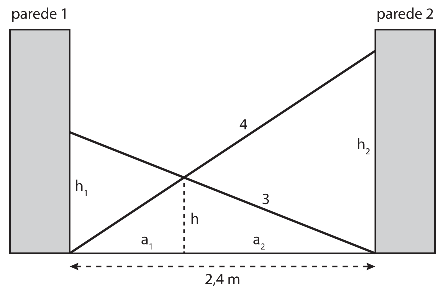
$$x = 4\sqrt{2}$$

A distância do ponto **P** até a horizontal é dada por:

$$x + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \cong 8 \cdot 1{,}4 = 11{,}2$$

Portanto, a distância do ponto **P** até a horizontal está entre 11 e 12.

05.18. Supondo que as faces das paredes nas quais as escadas são apoiadas sejam verticais, observe a próxima figura:



Utilizando-se o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos de hipotenusas 4 e 3, respectivamente, tem-se:

$3^2 = (2{,}4)^2 + (h_1)^2 \Rightarrow h_1 = 1{,}8$

$4^2 = (2{,}4)^2 + (h_2)^2 \Rightarrow h_2 = 3{,}2$

Da semelhança entre os triângulos com bases nas faces das paredes e das propriedades da proporção, tem-se:

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2}$$

$$\frac{1{,}8}{a_1} = \frac{3{,}2}{a_2} = \frac{1{,}8 + 3{,}2}{a_1 + a_2} = \frac{5{,}0}{2{,}4} \rightarrow a_1 = 0{,}864 \text{ e } a_2 = 1{,}536$$

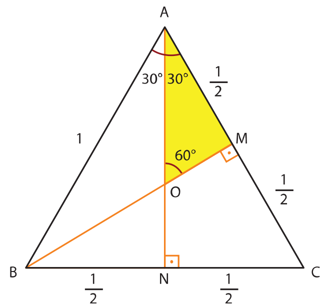
Da semelhança entre os triângulos retângulos de alturas **h** e **h_1**, tem-se:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$

$$\frac{h}{1{,}8} = \frac{1{,}536}{2{,}4} \Rightarrow h = 1{,}152$$

Logo, a altura **h**, do ponto onde as escadas se tocam, em relação ao chão, é de aproximadamente 1,15 m.

05.19. Considere a seguinte figura, na qual **M** é o ponto médio do lado de extremos **A** e **C**; **BM** e **AN** são as medidas das alturas relativas aos vértices **B** e **A**, respectivamente.



A reta que passa pelos pontos **A** e **O** é a bissetriz interna do ângulo de vértice **A**. Logo, divide o ângulo interno de vértice **A** em dois ângulos de medidas iguais a 30°.

Utilizando a razão seno no triângulo retângulo **AOM**, tem-se:

$$\text{sen}\,60° = \frac{AM}{AO}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{AO}$$

$$\frac{AO \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AO = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

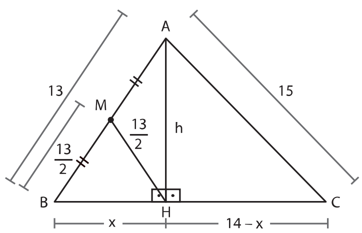
$$AO = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

O segmento **AO** mede $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

05.20. O triângulo **ABH** é retângulo em **H**.

Além disso, $\overline{HM}$ é uma mediana tal que **HM = AM = BM = AB/2**.



Utilizando o teorema de Pitágoras nos triângulos **AHC** e **ABH**, tem-se:

$15^2 = h^2 + (14 - x)^2$ (I)

$13^2 = h^2 + x^2$ (II)

Fazendo (I) – (II), tem-se:

$56 = 196 - 28x$

$28x = 140$

$x = 5$

Logo, o perímetro do triângulo **BMH** é dado por:

$2p = BM + HM + BH$

$$2p = \frac{13}{2} + \frac{13}{2} + 5$$

$2p = 18$

Aula 06

06.01. O maior ângulo se opõe ao maior lado. Logo, o maior ângulo, cuja medida será representada por α, se opõe ao lado de medida igual a 6. Utilizando a lei dos cossenos, tem-se:

$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$

$36 = 9 + 16 - 24 \cdot \cos\alpha$

$24 \cdot \cos\alpha = -11$

$$\cos\alpha = -\frac{11}{24}$$

06.02. Utilizando a lei dos senos no triângulo ABC, tem-se:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 45°} = 2 \cdot 1$$

$$AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$AB = \sqrt{2}$ cm

06.03. Utilizando a lei dos senos no triângulo ABC, tem-se:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\hat{A}}$$

$$\frac{8}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{6}{\operatorname{sen} 30°}$$

$6 \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = 4$

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

06.04. Utilizando a lei dos senos no triângulo da figura, tem-se:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 45°} = 2R$$

$x = 2R \cdot \operatorname{sen} 45°$

$$x = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x = 5\sqrt{2}$ cm

06.05. Utilizando a lei dos cossenos, tem-se:

$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\theta$

$16 = 9 + 4 - 12 \cdot \cos\theta$

$12 \cdot \cos\theta = -3$

$\cos\theta = -1/4$

06.06. Utilizando a lei dos cossenos no triângulo **ABC**, tem-se:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AC) \cdot \cos\hat{A}$$

$$\left(\frac{4a}{3}\right)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\hat{A}$$

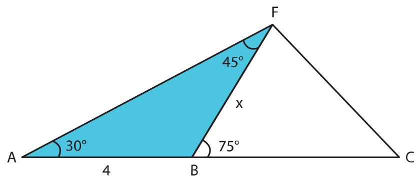
$$\frac{16a^2}{9} = 2a^2 \cdot (1 - \cos\hat{A})$$

$$\frac{16a^2}{18a^2} = 1 - \cos\hat{A} \quad (a > 0)$$

$$\cos\hat{A} = 1 - \frac{8}{9}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{1}{9}$$

06.07. As informações do enunciado podem ser ilustradas pela seguinte figura:



Utilizando a lei dos senos no triângulo destacado, tem-se:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{4}{\operatorname{sen} 45°}$$

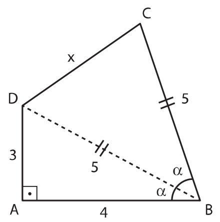
$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$x = 2\sqrt{2}$

Logo, a distância entre o farol **F** e o ponto **B**, em milhas náuticas, é igual a $2\sqrt{2}$.

06.08. Observe a seguinte figura:



O triângulo **ABC** é retângulo e possui catetos medindo 3 cm e 4 cm. Logo, BD = 5 e $\cos\alpha = 4/5$.

Utilizando a lei dos cossenos no triângulo **BCD**, tem-se:

$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$

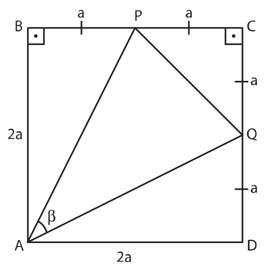
$$x^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{4}{5}$$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10}$ cm

Logo, $CD = \sqrt{10}$ cm.

06.09. Considere a seguinte figura:



Utilizando o teorema de Pitágoras nos triângulos **PQC**, **PBA** e **QAD**, tem-se:

$PQ = a\sqrt{2}$, $PA = a\sqrt{5}$ e $AQ = a\sqrt{5}$

Utilizando a lei dos cossenos no triângulo **APQ**, tem-se:

$$(a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{5})^2 - 2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5} \cdot \cos\beta$$

$$2a^2 = 5a^2 + 5a^2 - 10a^2 \cdot \cos\beta$$

$$10a^2 \cdot \cos\beta = 8a^2$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria e, ainda, levando em consideração que o ângulo **β** é agudo, tem-se:

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\text{sen}^2\beta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\beta = \frac{9}{25}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{3}{5};\ \text{sen}\beta > 0$$

06.10. Seja α a medida do maior ângulo do triângulo, oposto ao lado de medida 8 m. Utilizando a lei dos cossenos, tem-se:

$8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$

$64 = 16 + 36 - 48 \cdot \cos\alpha$

$48 \cdot \cos\alpha = -12$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, tem-se:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

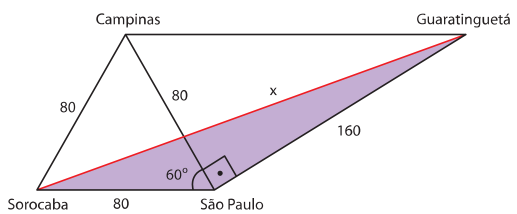
$$\text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{15}{16}$$

Tendo em vista que **sen α > 0**, pois **0° < α < 180°**, tem-se:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

06.11. Observe a seguinte ilustração:



Utilizando a lei dos cossenos no triângulo em destaque, tem-se:

$x^2 = 80^2 + 160^2 - 2 \cdot 80 \cdot 160 \cdot \cos 150°$

$x^2 = 6400 + 25600 - 25600 \cdot (-\cos 30°)$

$$x^2 = 32000 - 25600 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x^2 = 32000 + 12800\sqrt{3}$$

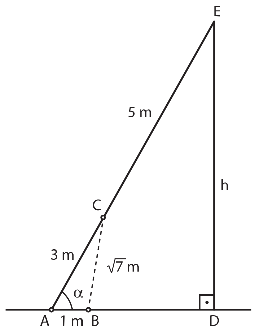
$$x^2 = 6400 \cdot (5 + 2\sqrt{3})$$

$$x = \sqrt{6400 \cdot (5 + 2\sqrt{3})}\ \ (x > 0)$$

$$x = 80 \cdot \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{3}}\ \text{km}$$

Portanto, a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de $80 \cdot \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{3}}$.

06.12. Considere a seguinte figura:



Utilizando a lei dos cossenos no triângulo **ABC**, tem-se:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AC) \cdot \cos\hat{A}$$

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$$

$$7 = 10 - 6 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Logo, α = 60°.

Utilizando a razão seno no triângulo **ADE**, tem-se:

$$\text{sen}\alpha = \frac{DE}{AE}$$

$$\text{sen}\,60° = \frac{h}{8}$$

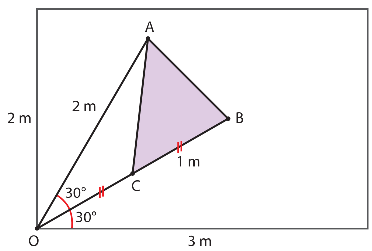
$$h = 8 \cdot \text{sen}\,60°$$

$$h = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 4\sqrt{3}$$

Portanto, a altura será igual a $4\sqrt{3}$ m.

06.13. A figura a seguir ilustra o quadro interativo e a situação descrita no enunciado.



Seja **O** o ponto que representa a origem do sistema cartesiano. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo **OAB**, tem-se:

$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot (AO) \cdot (OB) \cdot \cos 30°$

$(AB)^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(AB)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$

$AB = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo **OAC**, tem-se:

$(AC)^2 = (AO)^2 + (OC)^2 - 2 \cdot (AO) \cdot (OC) \cdot \cos 30°$

$(AC)^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(AC)^2 = 5 - 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$ m

Como BC = 1 m, $AC = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$ m e $AB = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m, conclui-se que o triângulo **ABC** é escaleno.

06.14. Pela lei dos senos utilizada no triângulo **XYZ**, tem-se:

$$\frac{x}{\text{sen}X} = \frac{y}{\text{sen}Y} = \frac{z}{\text{sen}Z} = 2R$$

Logo, pode-se escrever:

$\text{sen}X = \dfrac{x}{2R}$; $\text{sen}Y = \dfrac{y}{2R}$ e $\text{sen}Z = \dfrac{z}{2R}$

Assim, tem-se:

$$\text{sen}X \cdot \text{sen}Y \cdot \text{sen}Z = \frac{k \cdot x \cdot y \cdot z}{R^3}$$

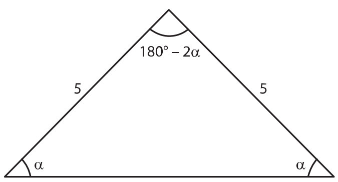
$$\frac{x}{2R} \cdot \frac{y}{2R} \cdot \frac{z}{2R} = \frac{k \cdot x \cdot y \cdot z}{R^3}$$

$$\frac{x \cdot y \cdot z}{8R^3} = \frac{k \cdot x \cdot y \cdot z}{R^3}$$

Como $\mathbf{x > 0}$, $\mathbf{y > 0}$ e $\mathbf{z > 0}$, conclui-se que:

$$k = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

06.15. A partir das informações do enunciado, pode-se construir a seguinte ilustração:



A medida da área desse triângulo é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \text{sen}(180° - 2\alpha)$$

Observando que $\mathbf{sen(180° - x) = sen\ x}$, para todo arco real **x**, tem-se:

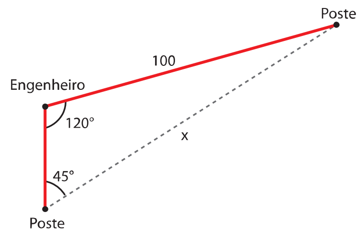
$$S = \frac{25}{2} \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

Para qualquer arco real **x**, tem-se $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$.

Desta forma, a área máxima ocorre quando $\text{sen}(2\alpha) = 1$.

Logo, $2\alpha = 90°$, ou seja, $\alpha = 45°$, o que implica $\mathbf{40° \leq \alpha < 50°}$.

06.16. Observe uma possível ilustração da situação descrita no enunciado:



Utilizando a lei dos senos no triângulo da figura, tem-se:

$$\frac{x}{\text{sen}\,120°} = \frac{100}{\text{sen}\,45°}$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = 50\sqrt{6}$$

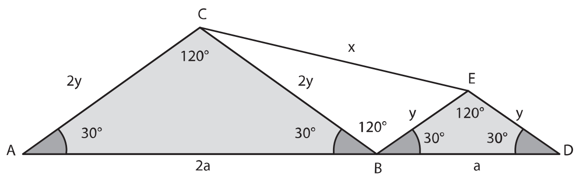
Tendo em vista que $\sqrt{6} \cong 2{,}45$, tem-se:

$x \cong 50 \cdot 2{,}45$

$x \cong 122{,}5$ m

$x \cong 122{,}47$ m

06.17. Observe a ilustração:



Utilizando a lei dos senos no triânhulo **BED**, tem-se:

$$\frac{y}{\text{sen}\,30°} = \frac{a}{\text{sen}\,120°}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{3}} \ \text{(I)}$$

Utilizando a lei dos cossenos no triângulo **BEC**, tem-se:

$x^2 = (2y)^2 + y^2 - 2 \cdot 2y \cdot y \cdot \cos 120°$

$x^2 = 5y^2 - 4y^2 \cdot (-0{,}5)$

$x^2 = 7y^2$

$x = \sqrt{7}y$ (II)

Substituindo (I) em (II), tem-se:

$$x = \sqrt{7} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$x = a \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$$

06.18. • Pitágoras em **ABC**:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$12^2 = (AB)^2 + 6^2$

$(AB)^2 = 144 - 36 = 108$

$AB = 6\sqrt{3}$ cm

• **M** é o ponto médio de $\overline{BC} \Rightarrow BM = CM = 3$ cm

• Utilizando a razão seno no triângulo **ABC**, tem-se:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60°$$

• Pitágoras no triângulo **ABM**:

$(AM)^2 = (AB)^2 + (BM)^2$

$(AM)^2 = (6\sqrt{3}\,)^2 + 3^2$

$(AM)^2 = 108 + 9$

$(AM)^2 = 117$

$AM = 3\sqrt{13}$ cm

• Lei dos senos no triângulo **AMC**:

$$\frac{MC}{sen(M\hat{A}C)} = \frac{AM}{sen(M\hat{C}A)}$$

$$\frac{3}{sen(M\hat{A}C)} = \frac{3\sqrt{13}}{sen\,60°}$$

$$sen(M\hat{A}C) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

• Relação fundamental da trigonometria:

$$sen^2(M\hat{A}C) + cos^2(M\hat{A}C) = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right)^2 + cos^2(M\hat{A}C) = 1$$

$$cos^2(M\hat{A}C) = 1 - \frac{3}{52}$$

$$cos^2(M\hat{A}C) = \frac{49}{52}$$

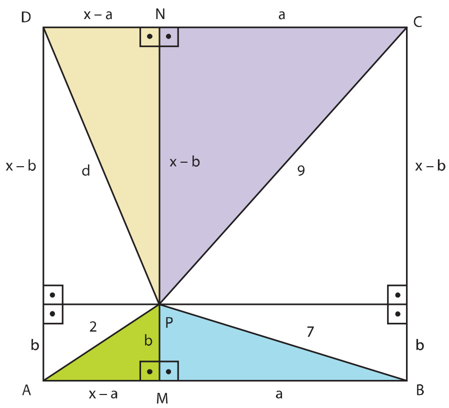
$$cos(M\hat{A}C) = \frac{7}{2\sqrt{13}}, \text{pois } cos(M\hat{A}C) > 0$$

• Cálculo da tangente do ângulo $M\hat{A}C$:

$$tg(M\hat{A}C) = \frac{sen(M\hat{A}C)}{cos(M\hat{A}C)}$$

$$tg(M\hat{A}C) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}}{\frac{7}{2\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

06.19. Considere a seguinte ilustração em que estão indicadas as distâncias mencionadas de um ponto interno **P** aos vértices do quadrado **ABCD**:



Utilizando o teorema de Pitágoras nos triângulos **APM**, **BPM**, **CPN** e **DPN**, respectivamente, tem-se:

$(AP)^2 = (AM)^2 + (MP)^2 \Rightarrow 2^2 = (x - a)^2 + b^2$ (I)

$(BP)^2 = (BM)^2 + (MP)^2 \Rightarrow 7^2 = a^2 + b^2$ (II)

$(CP)^2 = (CN)^2 + (NP)^2 \Rightarrow 9^2 = a^2 + (x - b)^2$ (III)

$(DP)^2 = (DN)^2 + (NP)^2 \Rightarrow d^2 = (x - a)^2 + (x - b)^2$ (IV)

Fazendo (IV) – (III) + (II) – (I), tem-se:

$d^2 - 9^2 + 7^2 - 2^2 = 0$

$d^2 = 36$

$d = 6$

06.20. a) 21,2 cm

Sendo x a medida do terceiro lado, desconhecido, utilizando a lei dos cossenos, tem-se:

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot cos\,60°$

$x^2 = 36 + 64 - 96 \cdot 0,5$

$x^2 = 52$

$x = \sqrt{52}$ $(x > 0)$

$x = \sqrt{4 \cdot 13}$

$x = 2\sqrt{13}$

$$x = 2 \cdot \sqrt{\frac{1300}{100}}$$

$$x = 2 \cdot \frac{\sqrt{1300}}{\sqrt{100}}$$

$$x \cong 2 \cdot \frac{\sqrt{1296}}{\sqrt{100}}$$

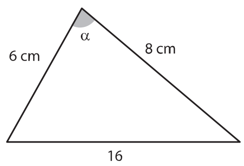
$$x \cong 2 \cdot \frac{36}{10}$$

$x \cong 7,2$ cm

Logo, o perímetro aproximado é igual a $6 + 8 + 7,2 = 21,2$ cm.

b) Não conseguirá construir o triângulo, pois em todo triângulo a medida de um lado deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois (Desigualdade Triangular).

2ª solução: Lei dos cossenos:



$16^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot cos\,\alpha$

$156 = -96 \cdot cos\,\alpha$

$$cos\,\alpha = -\frac{156}{96} \Rightarrow cos\,\alpha = -\frac{13}{8}$$

Entretanto, para qualquer ângulo α deve-se ter $-1 \leq cos\,\alpha \leq 1$.

Observe que $cos\alpha = -\frac{13}{8} < -1$, ou seja, não existe tal triângulo.

Aula 04

04.01. Em casos como este, para resolver a equação matricial, é suficiente considerarmos apenas uma das igualdades com solução única, conforme indicado a seguir.

$$\begin{bmatrix} -1 & \boxed{2} \\ x & x^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & \boxed{x+4} \\ 3x+4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x+4=2 \Rightarrow x=-2$$

Portanto, a solução da equação matricial é um número menor do que –1.

04.02. $X = Y \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2-2 & -2a \\ \boxed{4a} & -2+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \boxed{-8} & 2 \end{bmatrix}$

$$4a=-8 \Rightarrow a=-2$$

04.03. $\begin{bmatrix} 2x+1 & 4 & 0 \\ 1 & y-5 & y-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=5 \\ y-5=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+1=5 \\ y-5=1 \end{cases} \Rightarrow x=2 \text{ e } y=6 \Rightarrow x+y=8$$

04.04. $A = (a_{ij})_{2\times 3} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

- $i=j \Rightarrow a_{ij} = 2\cdot i - 3\cdot j \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -1 \\ a_{22} = 2\cdot 2 - 3\cdot 2 = -2 \end{cases}$

- $i\neq j \Rightarrow a_{ij} = 3\cdot i + j \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 3\cdot 1 + 2 = 5 \\ a_{13} = 3\cdot 1 + 3 = 6 \\ a_{21} = 3\cdot 2 + 1 = 7 \\ a_{23} = 3\cdot 2 + 3 = 9 \end{cases}$

Então, $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

04.05. $M = [a_{ij}]_{3\times 2} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

- $i=j \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = 2(i-j) \\ i-j=0 \end{cases} \Rightarrow a_{ij} = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=0 \\ a_{22}=0 \end{cases}$

- $i\neq j \Rightarrow a_{ij} = 2i+j \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 2\cdot 1 + 2 = 4 \\ a_{21} = 2\cdot 2 + 1 = 5 \\ a_{31} = 2\cdot 3 + 1 = 7 \\ a_{32} = 2\cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$

Portanto, $M = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

04.06. $\begin{cases} A = (a_{ij})_{3\times 3} \\ a_{ij} = i^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ tr(A) = 1^1 + 2^2 + 3^3 \\ tr(A) = 32 \end{cases}$

$$32 = 2^5 \Rightarrow tr(A) = 2^5$$

04.07. É importante lembrar que os elementos da primeira linha da matriz A^t são, na verdade, os elementos da primeira coluna da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soma = 1 + 2 + 1 = 4

04.08. Denotando por $a_{32(t)}$ o elemento que pertence à 3ª linha e à 2ª coluna da matriz A^t, transposta de A, temos que esse elemento é igual ao elemento a_{23} da matriz A. Portanto,

$$\left.\begin{matrix} a_{ij} = i-j, \text{ se } i \leq j \\ 2<3 \ (i<j) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{23} = 2-3 \Rightarrow a_{23} = -1$$

$$a_{32(t)} = a_{23} \Rightarrow a_{32(t)} = -1$$

04.09. $A = A^t \Rightarrow \begin{bmatrix} y & 36 & -7 \\ x^2 & 0 & 5x \\ 4-y & -30 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x^2 & 4-y \\ 36 & 0 & -30 \\ -7 & 5x & 3 \end{bmatrix}$

- $5x=-30$
  $x=-6$
- $4-y=-7$
  $y=11$

$$2x+y = 2\cdot(-6)+11 \Rightarrow 2x+y=-1$$

04.10. $A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2y & z-1 & 2 \end{pmatrix}$

- $2y=4$
  $y=2$
- $x=-1$
- $z-1=3$
  $z=4$

$$x+y+z=-1+2+4$$
$$x+y+z=5$$

04.11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ -A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A^t = -A$

Obs.: Nas matrizes antissimétricas, os elementos da diagonal principal devem ser todos iguais a zero. Isso só ocorre na matriz da alternativa **d** (é uma condição necessária, porém não é suficiente).

04.12. a) Incorreto
$a_{22} = 10 \neq 11$
b) Incorreto
$a_{13} = 20 \neq 30$
c) Incorreto
$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 12 + 16 + 11$
$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 39 \neq 40$
d) Incorreto
$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 30 + 10 + 11$
$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 51 \neq 52$
e) Correto
$a_{11} + a_{21} = 30 + 15$
$a_{11} + a_{21} = 45$

04.13. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geq j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$

04.14. O elemento a_{i2} indica quantas unidades do composto 2 serão necessárias para fabricar uma unidade do remédio do tipo i.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 5 \cdot a_{32} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 21$$

Para fabricar 3 remédios do tipo 1; 2 remédios do tipo 2 e 5 remédios do tipo 3, serão necessárias 21 unidades do composto 2.

04.15. Para obter todas as diferenças $p_{ij} - q_{ij}$, basta determinar a matriz $P-Q$.

$$P-Q=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$|5| = 5 \quad \text{e} \quad |-2| = |2| = 2$

$5 > 2$

Portanto, a distância entre P e Q é igual a 5.

04.16. Cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i, com um litro de combustível, à velocidade 10j km/h.

O modelo mais econômico é o que percorre a maior distância com um litro de combustível.

Na tabela a seguir, destacamos a maior distância percorrida para cada uma das velocidades informadas (maior distância em cada coluna).

Modelo ↓	Velocidade $= 10 \cdot j$ km/h								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1.0	6	7,6	7,2	8,9	8,2	11	10	12	11,8
1.4	5	7,5	7	8,5	8	10,5	9,5	11,5	11
1.8	3	2,7	5,9	5,5	8,1	7,4	9,8	9,4	13,1

a) Incorreto

O modelo 1.0 é o mais econômico a 30 km/h, pois é o que percorre a maior distância (7,2 km).

b) Incorreto

A 50 km/h, com um litro de combustível, o modelo 1.4 percorre 8 km, e o modelo 1.8, 8,1 km. Portanto, nessas condições, o modelo 1.8 é mais econômico do que o 1.4.

c) Incorreto

Para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/h, o carro 1.4 é o de maior consumo, pois percorre a menor distância (9,5 km).

d) Correto

O modelo 1.0 é o mais econômico a 80 km/h, pois é o que percorre a maior distância (12 km).

04.17.
- Na matriz **S**, o elemento $s_{23} = 75$ indica que, a cada 2 minutos, o semáforo fica aberto durante 75 segundos para o fluxo de veículos da rua 2 para a rua 3.
- Das 8 h às 10 h, temos:

  $\Delta t = 10\,h - 8\,h = 2h \Rightarrow \Delta t = 120\,min$
- Com o sinal aberto podem passar, de uma rua para outra, até 12 carros por minuto. Então, sendo N número de carros que podem passar da rua 2 para a rua 3, das 8h às 10 h, temos que:

$$N_{máximo} = \frac{75\,s}{2\,min} \cdot 120\,min \cdot \frac{12\text{ carros}}{1min}$$

$$N_{máximo} = \frac{75\,s}{120\,s} \cdot 120\,min \cdot \frac{12\text{ carros}}{1min}$$

$$N_{máximo} = 75 \cdot 12\text{ carros}$$

$$N_{máximo} = 900\text{ carros}$$

04.18. (V) O número $n_1(\text{antes})$ de alunos do curso 1, antes das transferências, é igual à soma dos elementos da linha 1.

$$n_1(\text{antes}) = \overbrace{a_{11}}^{\text{alunos que permaneceram}} + \overbrace{(a_{12}+a_{13})}^{\text{alunos que saíram}}$$

$$n_1(\text{antes}) = 132 + (7+8)$$

$$n_1(\text{antes}) = 147$$

(V) O número $n_2(\text{depois})$ de alunos do curso 2, depois das transferências, é igual à soma dos elementos da coluna 2.

$$n_2(\text{depois}) = \overbrace{a_{22}}^{\text{alunos que permaneceram}} + \overbrace{(a_{12}+a_{32})}^{\text{alunos que entraram}}$$

$$n_2(\text{depois}) = 115 + (7+15)$$

$$n_2(\text{depois}) = 137$$

(F) Foram transferidos $a_{13} + a_{23} = 8 + 13 = 21$ alunos para o curso 3.

(V) O número total de alunos transferidos, $n_{total}(\text{transferidos})$, é igual à soma dos elementos que estão fora da diagonal principal.

$$n_{total}(\text{transferidos}) = a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{23} + a_{31} + a_{32}$$

$$n_{total}(\text{transferidos}) = 7 + 8 + 12 + 13 + 14 + 15$$

$$n_{total}(\text{transferidos}) = 69$$

(F) O número total de alunos nos cursos 1, 2 e 3 é igual à soma de todos os elementos da matriz (a soma é a mesma antes e depois das transferências):

$$N_{total} = \overbrace{(132+12+14)}^{\text{coluna 1}} + \overbrace{(7+115+15)}^{\text{coluna 2}} + \overbrace{(8+13+119)}^{\text{coluna 3}}$$

$$N_{total} = 158 + 137 + 140$$

$$N_{total} = 435$$

Portanto, o número total de alunos nos curso 1, 2 e 3 é igual a 435 $(435 \neq 363)$.

04.19. Note que, na matriz, $a_{ij} = \begin{cases} i, \text{ se i for um divisor de j} \\ 0, \text{ se i não for um divisor de j} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Numa matriz 100×100, construída com o mesmo critério, na centésima coluna são diferentes de zero apenas os elementos

$a_{1\,100}, a_{2\,100}, a_{4\,100}, a_{5\,100}, a_{10\,100}, a_{20\,100}, a_{25\,100}, a_{50\,100}$ e $a_{100\,100}$,

que são iguais a 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100, respectivamente.

Portanto, a quantidade de números diferentes de zero, na centésima coluna dessa matriz, é 9.

Atenção: Após ter percebido que

$$a_{i\,100} = i \neq 0 \text{ se i for divisor de 100,}$$

bastava ter determinado a quantidade de divisores positivos de 100, pelo princípio fundamental da contagem:

$100 = 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = 9$ é o número de divisores positivos de 100 e, portanto, a quantidade de elementos diferentes de zero que pertencem à centésima coluna da matriz.

04.20. A primeira linha da matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a-b+2c & 1 & 6 \\ b+c-3a & \frac{1}{2} & c-2a+b \end{bmatrix}$ não é nula.

$a_{22}=2\cdot a_{12}, a_{23}=2\cdot a_{13}$ e $a_{32}=a_{12} \Rightarrow$ matriz A terá posto 1 se (Linha 2) = 2 · (Linha 1) e (Linha 3) = (Linha 1).

Ou seja, se $3a-b+2c=2\cdot 2=4;\;\; b+c-3a=2$ e $c-2a+b=3$.

$$\begin{cases} 3a-b+2c=4 \to E_1 \\ b+c-3a=2 \to E_2 \\ c-2a+b=3 \to E_3 \end{cases}$$

- Da soma E_1+E_2: $3c=6 \Rightarrow c=2$
- Da soma $(-E_2)+E_3$: $a=1$
- Substituindo $a=1$ e $c=2$ na equação E_2:

$$b+2-3\cdot 1=2 \Rightarrow b=3$$

A matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a-b+2c & 1 & 6 \\ b+c-3a & \frac{1}{2} & c-2a+b \end{bmatrix}$ tem posto 1 para $a=1$, $b=3$ e $c=2$

04.21. Escrevendo os elementos das matrizes em ordem crescente:

$$\overbrace{0, 1, 2, \cdots, 15}^{A_1}, \overbrace{16, 17, 18, \cdots, 31}^{A_2}, \overbrace{32, 33, \cdots, 47}^{A_3}, \cdots, \overbrace{\cdots, 75432, \cdots}^{A_n}, \cdots$$

$$\overbrace{0, 1, 2, \cdots, 75432}^{75433 \text{ números}}, \cdots$$

Cada matriz é formada por exatamente 16 números naturais, em sequência.

Na divisão de 75433 por 16, 4714 é o quociente e 9, o resto. Ou seja, são 4714 matrizes completas mais 9 números na matriz A_{4715}, até encontrarmos o número 75432.

$$A_{4715}=\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ 75432 & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} \Rightarrow a_{31}=75432$$

Portanto, 75432 é o elemento a_{31} da matriz A_{4715}. Ou seja: $n=4715$, $i=3$ e $j=1$.

Aula 05

05.01. $3A-4B=3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$3A-4B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 0 & -12 \\ -4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$

$3A-4B=\begin{pmatrix} 3-16 & -3-0 & 6-(-12) \\ 0-(-4) & 9-(-8) & 12-12 \end{pmatrix}$

$3A-4B=\begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{pmatrix}$

05.02. $2A+3B-C=2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$2A+3B-C=\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$2A+3B-C=\begin{bmatrix} 6+6-(-1) & 10+(-3)-1 \\ 4+12-0 & 2+9-3 \end{bmatrix}$

$2A+3B-C=\begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$

05.03.
- $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
- $X-A+B=C^t \Rightarrow X=C^t+A-B$
- $X=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix} -1+3-2 & 0+5-(-1) \\ 1+2-4 & 3+1-3 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

05.04.
- $X+2A=3B \Rightarrow X=3B-2A$
- $X=3B-2A$

$X=3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix} 6-6 & -3-10 \\ 12-4 & 9-2 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

05.05.
- $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
- $(A^t-B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$(A^t-B)=\begin{pmatrix} 1-0 & 2-1 & 3-2 \\ 3-(-1) & 4-2 & 0-0 \end{pmatrix}$

$(A^t-B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

05.06. a) Falsa

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular, mas não diagonal, pois há elementos diferentes de zero fora da diagonal principal.

b) Falsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Falsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

d) Falsa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t \neq A$$

e) Verdadeira

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior.

05.07. $2 \cdot \begin{bmatrix} x & x^2-1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2x^2-2 \\ -2 & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x^2+6x \\ 2x^2-2 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x^2+6x \\ 2x^2-2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+4x = 0 \rightarrow \langle x = 0 \text{ ou } x = -4 \\ x^2 = 16 \rightarrow \langle x = 4 \text{ ou } x = -4 \end{cases}$$

Portanto, todas as igualdades serão satisfeitas se, e somente se, $x = -4$, donde segue que:

$x^3 = (-4)^3 = -64$

05.08. $(A+B)^t + C = I_2$

$(A+B)^t = I_2 - C$

$$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1-0 & 0-2 \\ 0-4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t \Rightarrow A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, a soma dos elementos da matriz $A^t + B^t$ é igual a -4.

05.09. $5X - 2A = 3B$

$5X = 3B + 2A$

$$5X = 3\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5X = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 6 \\ -3 & 15 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$5X = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 10 \\ -5 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{15}{5} & \frac{-10}{5} & \frac{10}{5} \\ \frac{-5}{5} & \frac{15}{5} & \frac{5}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

05.10. $3X - A^t + 2B = 0$

$3X = A^t - 2B$

$$3X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^t - 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -4 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

05.11. $3A = B + C$

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = 6+x+y \\ 3z = -1+z+w \\ 3w = 2w+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = 6+x+y \\ 3z = -1+z+w \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{6+x}{2} \\ z = \dfrac{w-1}{2} \\ w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+w = 10 \\ x+y-z-w = 2 \end{cases}$$

Então, é correto afirmar que $x+y+z+w = 10$.

05.12. $A+B-C-X = 0 \Rightarrow X = A+B-C$

$X = A+B-C$

$$X = \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 25+5-(-1) \\ 12+(-8)-10 \\ 13+3-(-1) \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 31 \\ -6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

05.13.

$$\cdot \begin{cases} X+Y = A \\ X-Y = B \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{r} X+Y = A \\ + \; X-Y = B \\ \hline 2X = A+B \end{array} \qquad \begin{array}{r} X+Y = A \\ - \; X-Y = B \\ \hline 2Y = A-B \end{array}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad 2Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad 2Y = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(I)

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(II)

Dos resultados obtidos em (I) e (II):

$$2X-3Y=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

$$2X-3Y=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9\\-6\end{bmatrix}$$

$$2X-3Y=\begin{bmatrix}-5\\16\end{bmatrix}$$

05.14. •
$$\begin{cases}2X+Y=\begin{bmatrix}4&5\\4&5\end{bmatrix}\times 2\\ X-2Y=\begin{bmatrix}-3&5\\2&-5\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4X+2Y=\begin{bmatrix}8&10\\8&10\end{bmatrix}\\ X-2Y=\begin{bmatrix}-3&5\\2&-5\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 4X+2Y=\begin{bmatrix}8&10\\8&10\end{bmatrix}\\ + & X-2Y=\begin{bmatrix}-3&5\\2&-5\end{bmatrix}\\ \hline & 5X=\begin{bmatrix}5&15\\10&5\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}\quad\text{(I)}\end{array}$$

• $2X+Y=\begin{bmatrix}4&5\\4&5\end{bmatrix}$

$$X+X+Y=\begin{bmatrix}4&5\\4&5\end{bmatrix}$$

$$X+Y=\begin{bmatrix}4&5\\4&5\end{bmatrix}-X\quad\text{(II)}$$

• Substituindo (I) em (II):

$$X+Y=\begin{bmatrix}4&5\\4&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow X+Y=\begin{bmatrix}3&2\\2&4\end{bmatrix}$$

05.15. •
$$\begin{cases}\dfrac{X-A}{2}=\dfrac{B+X}{3}+C\\ \text{mmc}(2;3)=6\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}6\left(\dfrac{X-A}{2}\right)=6\left(\dfrac{B+X}{3}+C\right)\\ 3X-3A=2B+2X+6C\\ X=3A+2B+6C\end{array}$$

• $X=3A+2B+6C$

$$X=3\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}6&3\\9&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24&-6\\12&6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}28&1\\23&3\end{pmatrix}$$

05.16. I) Correto

$a_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{se } i\neq j\\0,\ \text{se } i=j\end{cases}\Rightarrow a_{23}=a_{32}=1$, pois $i\neq j$ nos dois elementos $(2\neq 3)$.

II) Correto

$a_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{se } i\neq j\\0,\ \text{se } i=j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=0$, pois $i=j$ nos três casos (a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44} são os elementos da diagonal principal da matriz **A**).

III) Correto

Denotando por a_{ij} os elementos da matriz A, por i_{ij} os elementos da matriz identidade I e por s_{ij} os elementos da matriz $S=A+I$, temos que:

$$\begin{cases}a_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{se } i\neq j\\0,\ \text{se } i=j\end{cases}\\ \\ i_{ij}=\begin{cases}0,\ \text{se } i\neq j\\1,\ \text{se } i=j\end{cases}\end{cases}\Rightarrow c_{ij}=a_{ij}+i_{ij}=\begin{cases}1+0=1,\ \text{se } i\neq j\\0+1=1,\ \text{se } i=j\end{cases}$$

Portanto, todos os elementos da matriz $A+I$ são iguais a 1.

Obs.: Se preferir, escreva as matrizes antes de analisar os itens.

05.17. A matriz **A**, da forma como foi definida, é a matriz identidade de ordem 3. Ou seja,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{(I)}$$

Note que, sendo **B** uma matriz quadrada de ordem $n=3$, $i+j=4\Rightarrow i+j=n+1\Rightarrow b_{ij}$ pertence à diagonal secundária da matriz **B**. De fato:

Se $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 3}$ tal que $\begin{cases}b_{ij}=1,\ \text{se } i+j=4\\b_{ij}=0,\ \text{se } i+j\neq 4\end{cases}$, então

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad\text{(II)}$$

De (I) e (II):

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

05.18. Se

$$A=\begin{bmatrix}12&20&13&8&50&25&1\\0&0&34&32&3&4&0\\45&26&13&24&0&0&0\\30&45&16&20&11&17&0\\1&50&21&3&35&42&11\end{bmatrix}\text{ e}$$

$$B=\begin{bmatrix}10&11&10&15&-8&30&-1\\14&31&19&19&-3&-4&0\\6&-4&8&31&0&0&0\\-8&6&16&32&20&-17&0\\44&-8&13&30&20&10&20\end{bmatrix},$$

então

$$M=A+B=\begin{bmatrix}22&31&23&23&42&55&0\\14&31&53&51&0&0&0\\51&22&21&55&0&0&0\\22&51&32&52&31&0&0\\45&42&34&33&55&52&31\end{bmatrix}$$

Consultando a tabela código e substituindo, pelas letras correspondentes, os números não nulos, segue que

$$M=\begin{bmatrix} S & O & R & R & I & A & \\ V & O & C & E & & & \\ E & S & T & A & & & \\ S & E & N & D & O & & \\ F & I & L & M & A & D & O \end{bmatrix}$$

José recebeu a mensagem:
SORRIA VOCE ESTA SENDO FILMADO

05.19. $x\cdot A+y\cdot B=O$

$$x\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x & x\\ -x & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y & 3y\\ 2y & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x-y & x+3y\\ -x+2y & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ x+3y=0\\ -x+2y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-y=0\\ x+3y=0\\ -x+2y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0\Rightarrow x\cdot y=0$$

05.20. A matriz X é, necessariamente, uma matriz quadrada de ordem 2.

Considerando, então, que $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, temos:

$$A+3\cdot X+X^t=B^t$$

$$3\cdot X+X^t=B^t-A$$

$$3\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}6 & 6\\ 3 & 7\end{bmatrix}^t-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3a & 3b\\ 3c & 3d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4a & 3b+c\\ 3c+b & 4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}4a=4\\ 3b+c=2\\ 3c+b=6\\ 4d=4\end{cases}$$

- $4a=4\Rightarrow a=1$
- $4d=4\Rightarrow d=1$
- $\begin{cases}3b+c=2\\ b+3c=6\end{cases}\Rightarrow b=0 \text{ e } c=2$

Portanto, $X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

05.21. Considerando que A_1, A_2 e A_3 são os valores arrecadados pelas barracas B_1, B_2 e B_3, respectivamente, e sabendo que b_{ij} indica a soma dos valores arrecadados pelas barracas B_i e B_j (em milhares de reais):

$$B=\begin{bmatrix}x & 1{,}8 & 3{,}0\\ a & y & 2{,}0\\ d & c & z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b_{12}=1{,}8\Rightarrow A_1+A_2=1800\\ b_{13}=3{,}0\Rightarrow A_1+A_3=3000\\ b_{23}=2{,}0\Rightarrow A_2+A_3=2000\end{cases}$$

a)

$$\begin{array}{r}A_1+A_3=3000\\ -\quad A_1+A_2=1800\\ \hline A_3-A_2=1200\end{array}\Rightarrow A_3=A_2+1200$$

A barraca B_3 arrecadou R$ 1200,00 a mais do que a barraca B_2.

b)

$$\begin{array}{r}A_1+A_3=3000\\ +\quad A_1+A_2=1800\\ A_2+A_3=2000\\ \hline 2A_1+2A_2+2A_3=6800\end{array}\Rightarrow A_1+A_2+A_3=3400$$

As três barracas arrecadaram, juntas, um total de R$ 3400,00.

Aula 06

06.01. I. Correto. O produto existe, pois o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**, e é uma matriz do tipo 3×1.

$$A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 1}=(AB)_{3\times 1}$$

II. Incorreto. Não existe o produto $A_{5\times 4}\cdot B_{5\times 2}$, pois o número de colunas da matriz **A** é diferente do número de linhas de **B**.

III. Correto. O produto existe, pois o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**, e é uma matriz do tipo 2×2.

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=(AB)_{2\times 2}$$

06.02. $C=A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{bmatrix}$

$$C=\begin{bmatrix}1\cdot1+5\cdot6 & 1\cdot5+5\cdot5 & 1\cdot6+5\cdot1\\ 2\cdot1+0\cdot6 & 2\cdot5+0\cdot5 & 2\cdot6+0\cdot1\\ -2\cdot1+1\cdot6 & -2\cdot5+1\cdot5 & -2\cdot6+1\cdot1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}31 & 30 & 11\\ 2 & 10 & 12\\ 4 & -5 & -11\end{bmatrix}$$

Soma = 30 + 10 + (–5) = 35

06.03. $D=A^t+B\cdot C$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^t+\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\cdot2 & 4\cdot1 & 4\cdot3\\ 3\cdot2 & 3\cdot1 & 3\cdot3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 4 & 12\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}11 & 6 & 12\\ 11 & 4 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow d_{12}+d_{22}=6+4=\mathbf{10}$$

06.04. $A\cdot B=C$

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 36 & 45\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot1+x\cdot1 & 1\cdot2+x\cdot1\\ y\cdot1+z\cdot1 & y\cdot2+z\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 36 & 45\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+x & 2+x\\ y+z & 2y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 36 & 45\end{pmatrix}\quad(*)$$

Soma dos elementos da matriz A:

$\text{Soma} = 1 + x + y + z$

$\text{Soma} = (1 + x) + (y + z)$

$\qquad \downarrow \text{de } (*)$

$\text{Soma} = 4 + 36$

$\text{Soma} = \mathbf{40}$

06.05. $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 - x^2 & -4 + 2x \\ 2y - x & -2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4 + 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \\ -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = \mathbf{3}$$

06.06. $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ y & z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & x + 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 6 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$$

$x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 6 \cdot 10$

$x \cdot y \cdot z = \mathbf{120}$

06.07. $(A - B)_{m \times n} \cdot C_{2 \times t} = X_{3 \times 4} \Rightarrow m = 3,\ n = 2 \text{ e } t = 4$

$$(A - B)_{m \times n} = (A - B)_{3 \times 2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_{3 \times r} = A_{3 \times 2} \\ \\ B_{3 \times s} = B_{3 \times 2} \end{array}\right. \Rightarrow r = s = 2$$

- $r + s + t = 2 + 2 + 4$

  $r + s + t = \mathbf{8}$

06.08.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{nutriente 1} \\ \text{nutriente 2} \\ \text{nutriente 3} \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{210} & \mathbf{370} & \mathbf{450} & \mathbf{290} \\ \mathbf{340} & \mathbf{520} & \mathbf{305} & \mathbf{485} \\ \mathbf{145} & \mathbf{225} & \mathbf{190} & \mathbf{260} \end{bmatrix} \end{array}$$

percentuais de mistura

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{35\%} \\ \mathbf{25\%} \\ \mathbf{30\%} \\ \mathbf{10\%} \end{bmatrix} \end{array}$$

A massa, em miligramas, do nutriente 2 presente em um quilograma da mistura de rações, é igual ao elemento a_{21} da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{210} & \mathbf{370} & \mathbf{450} & \mathbf{290} \\ \mathbf{340} & \mathbf{520} & \mathbf{305} & \mathbf{485} \\ \mathbf{145} & \mathbf{225} & \mathbf{190} & \mathbf{260} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{35\%} \\ \mathbf{25\%} \\ \mathbf{30\%} \\ \mathbf{10\%} \end{bmatrix}:$$

$a_{21} = 340 \cdot 35\% + 520 \cdot 25\% + 305 \cdot 30\% + 485 \cdot 10\%$

$a_{21} = 340 \cdot 0{,}35 + 520 \cdot 0{,}25 + 305 \cdot 0{,}30 + 485 \cdot 0{,}10$

$a_{21} = 119 + 130 + 91{,}5 + 48{,}5$

$a_{21} = \mathbf{389}$

Em 1kg de rações, estão presentes 389 mg do nutriente 2.

06.09. Para determinar o número total de samambaias existentes na reserva florestal, basta efetuar a multiplicação das matrizes $\mathbf{A^t}$ e $\mathbf{B}$, nessa ordem.

$\text{Total} = \mathbf{A^t \cdot B}$

$$\text{Total} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Total} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Total} = (0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3)$

$\text{Total} = 178$

Resposta: $\mathbf{A^t \cdot B}$

06.10.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{jan.} & \text{fev.} & \text{mar.} \end{array} \\ \begin{array}{r} P1 \\ P2 \\ P3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P1 & P2 & P3 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Jan} \\ \text{Fev} \\ \text{Mar} \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 20 & 35 \\ 28 & 20 & 40 \\ 27 & 25 & 38 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Incorreto

c_{11} representa o total arrecadado com as vendas do produto P1 durante os três meses.

b) Incorreto

$c_{22} = 1 \cdot 20 + 0 \cdot 20 + 2 \cdot 25 = 70 \Rightarrow c_{22} \neq 0$

c) Correto

c_{33} representa o total arrecadado com as vendas do produto P3 durante os três meses.

d) Incorreto

$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{3 \times 3} \Rightarrow C$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

e) Incorreto

Como vimos, em (d), C é uma matriz quadrada de ordem 3.

06.11. $\text{Custo} = P \cdot C$

$$\text{custo} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{custo} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

06.12. Observe a nova coluna na tabela 2, onde está indicada a soma dos valores de cada linha.

Tabela 1

EMPRESA	ÁREAS	
	Urbana	Rural
Classic	6	4
Luxor	5	6
Request	4	5

Tabela 2

ÁREAS	EMPRESA			TOTAL
	Imbuia	Cerejeira	Canela	
Urbana	15	18	16	49
Rural	12	20	16	48

Agora, basta somar os produtos dos elementos destacados com a mesma cor.

Portanto, a quantidade de mudas de árvores plantadas pela ONG a pedido da empresa LUXOR, no mês de setembro, foi de:

$5 \cdot 49 + 6 \cdot 48 = 245 + 288 = \mathbf{533}$

06.13. a) Incorreto

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Sabendo que o produto de matrizes **não é** comutativo, não podemos garantir que $AB + BA = 2AB$.

EM GERAL, $AB \neq BA$.

b) Incorreto

O produto de matrizes **não é** comutativo. Portanto, não podemos garantir que $B \cdot C = C \cdot B$ (em geral, $BC \neq CB$).

c) Incorreto

$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$. **E, novamente, não podemos garantir que** $(-AB + BA) = \mathbf{O}$, **pois, em geral,** $AB \neq BA$

d) Correto

O produto $C \cdot I$ existe, pois **C** e **I** são matrizes quadradas de mesma ordem, e sendo a matriz identidade I o elemento neutro da multiplicação de matrizes, é verdade que $C \cdot I = C$

e) Incorreto

$A \cdot I = A$ e **A** não é, necessariamente, igual a I.

06.14. $\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ é transformada em $\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}$ pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

06.15. $P \cdot Q = \begin{bmatrix} 2{,}05 & 9{,}89 & 2{,}48 & 1{,}78 \\ 1{,}93 & 11{,}02 & 2{,}00 & 1{,}60 \\ 1{,}70 & 10{,}80 & 2{,}40 & 1{,}20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 2{,}05 \cdot 5 + 9{,}89 \cdot 3 + 2{,}48 \cdot 2 + 1{,}78 \cdot 3 \\ 1{,}93 \cdot 5 + 11{,}02 \cdot 3 + 2{,}00 \cdot 2 + 1{,}60 \cdot 3 \\ 1{,}70 \cdot 5 + 10{,}80 \cdot 3 + 2{,}40 \cdot 2 + 1{,}20 \cdot 3 \end{bmatrix}$

$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 50{,}22 \\ 51{,}51 \\ 49{,}3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ a dona de casa economizará comprando no supermercado **C**.

06.16. Observe a sequência:

$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

É fácil perceber que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então,

$A^{2013} = \begin{bmatrix} 1 & 2013 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ a soma dos elementos da matriz A^{2013} é

$1 + 2013 + 1 + 0 = \mathbf{2015}$

06.17. 01) Incorreto

Existem matrizes **A** e **B**, não nulas, tal que $A \cdot B$ é a matriz nula.

Por exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

02) Incorreto

$R = M_{5 \times 7} \cdot P_{7 \times 5} \Rightarrow R_{5 \times 5}$

$R_{5 \times 5} \Rightarrow R^2$ tem a mesma ordem da matriz R: 5×5

$R^2_{5 \times 5} \Rightarrow R^2$ tem $5 \cdot 5 = 25$ elementos.

04) Correto

Uma matriz quadrada, qualquer, e sua transposta têm os mesmos elementos na diagonal principal. Ou seja, a diagonal principal de L é igual à diagonal principal da transposta de **L**. Logo, os traços são iguais.

08) Correto

$A(a_{ij})_{1 \times 3} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$

Se $a_{ij} = i - 3j$, então:

$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$

$A = [1-3 \cdot 1 \quad 1-3 \cdot 2 \quad 1-3 \cdot 3]$

$A = [-2 \quad -5 \quad -8]$

16) Correto

Para que exista o produto PQ e seja possível calcular a diferença PQ – R, a única possibilidade é a que segue:

$PQ - R = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ 6 \end{bmatrix}$

$PQ - R = \begin{bmatrix} 19 \\ 2+2x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ 6 \end{bmatrix}$

$PQ - R = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

06.18. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$

Conclui-se, então, que

$$A^n = \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se n for ímpar;} \\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se n for par} \end{cases}$$

Assim, denotando por **S** a soma pedida:

$$S = \underbrace{A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^{39} + A^{40}}_{\text{40 parcelas}}$$

$$S = \underbrace{(A+I) + (A+I) + \cdots + (A+I)}_{\text{20 parcelas iguais a (A+I)}}$$

$$S = 20 \cdot (A+I)$$

$$S = 20 \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$S = 20 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^{39} + A^{40} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$$

06.19. $(A \cdot A^t - 3I) \cdot X = B$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x-2y \\ -2x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-2y = 1 \\ -2x+2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-2y = 1 \\ -2x+2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x = -1 \\ y = 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow x + y = -1$$

06.20. $C = A \cdot B$

$$C = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 50\cdot10+20\cdot15+20\cdot30 & 50\cdot20+20\cdot20+20\cdot20 & 50\cdot15+20\cdot20+20\cdot30 \\ 40\cdot10+10\cdot15+30\cdot30 & 40\cdot20+10\cdot20+30\cdot20 & 40\cdot15+10\cdot20+30\cdot30 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1400 & 1800 & 1750 \\ 1450 & 1600 & 1700 \end{pmatrix}$$

a) $C = \begin{pmatrix} 1400 & 1800 & 1750 \\ 1450 & 1600 & 1700 \end{pmatrix}$;

b) $c_{23} = 1700$ significa que serão necessários 1700 kg do fertilizante Z para as culturas de milho, soja e feijão na região Q.

06.21. a) Para que seja possível o produto **AB**, e resulte na matriz I_2, **B** tem que ser uma matriz 2×3.

$$B \cdot A = I_2$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}+b_{13} & b_{12}+b_{13} \\ b_{21}+b_{23} & b_{22}+b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_{11}+b_{13} = 1 \\ b_{12}+b_{13} = 0 \\ b_{21}+b_{23} = 0 \\ b_{22}+b_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = 1-b_{13} \\ b_{12} = -b_{13} \\ b_{21} = -b_{23} \\ b_{22} = 1-b_{23} \end{cases}$$

Portanto,

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1-b_{13} & -b_{13} & b_{13} \\ -b_{23} & 1-b_{23} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Tomando $b_{13}=p$ e $b_{23}=q$: $B=\begin{bmatrix} 1-p & -p & p \\ -q & 1-q & q \end{bmatrix}$

Resposta: $B=\begin{bmatrix} 1-p & -p & p \\ -q & 1-q & q \end{bmatrix}$, para **p** e **q** quaisquer.

b) **Sim**!

Exemplo:

$p=q=0 \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B\cdot B^t=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2$$

06.22. a) $C=A+B^t$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $D=A^2$

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+5\cdot 1 & -1\cdot 5+5\cdot 3 \\ 1\cdot(-1)+3\cdot 1 & 1\cdot 5+3\cdot 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

c) $E=2A-B^t$

$$E=2\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t$$

$$E=\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

d) $F=3A-2B$

$$F=3\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow F=\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e) $G=A\cdot B$

$$G=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} -1\cdot 1+5\cdot 3 & -1\cdot 0+5\cdot 2 \\ 1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 0+3\cdot 2 \end{pmatrix} \Rightarrow G=\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Aula 04

04.01. (V) $\frac{2}{5}=0,4=40\%$

(V) $\frac{1}{2}=0,5=50\%$

(V) $15\%\text{ de }600=\frac{15}{100}\cdot 600=90$

(F) $65\%\text{ de }250=\frac{65}{100}\cdot 250=162,5\quad(162,5\neq 150)$

04.02. (V) $35\%\text{ de }x=\frac{35}{100}\cdot x=0,35\cdot x$

(V) $x+30\%\text{ de }x=x+0,30\cdot x=(1+0,30)\cdot x=1,30\cdot x$

(V) $x-30\%\text{ de }x=x-0,30\cdot x=(1-0,30)\cdot x=0,70\cdot x$

(F) $1,20\cdot x=(1+0,20)\cdot x=x+0,20\cdot x=x\ \underbrace{+20\%\text{ de }x}_{\text{valor 20\% superior ao inicial}}$

04.03. $\frac{24000}{720}=\frac{100\%}{x}$

$x=\frac{720\cdot 100}{24000}\ \Rightarrow\ x=3\%$

$2,5\%<3\%<3,5\%$

04.04. $\frac{20}{5}=\frac{100\%}{x}$

$x=\frac{5\cdot 100}{20}\ \Rightarrow\ x=25\%$

04.05. R\$ 18450,00 − R\$ 15000 = R\$ 3450,00 (multa)

$\frac{15000}{3450}=\frac{100\%}{x}$

$x=\frac{3450\cdot 100}{15000}\ \Rightarrow\ x=23\%$

04.06. Supondo que cada unidade custa **P** reais, temos:

I – Valor da compra sem descontos:

$P+P+P=3P=100\%$

II – Valor da compra com descontos:

$\underbrace{P}_{\text{sem desconto}}+\underbrace{0,9P}_{\text{com desconto de 10\%}}+\underbrace{0,8P}_{\text{com desconto de 20\%}}=2,7P$

III – Valor do desconto:

$3P-2,7P=0,3P=x\%$

• $\frac{3P}{0,3P}=\frac{100\%}{x}\ \Rightarrow\ x=10\%$

04.07. Vamos supor que, antes dos aumentos, a marmita custava **P** reais. Depois dos três aumentos a marmita passou a custar R\$ 10,89. Portanto:

$P\cdot\frac{112,5}{100}\cdot\frac{110}{100}\cdot\frac{110}{100}=10,89\ \Rightarrow\ P=8\text{ reais}$

Aumento = R\$ 10,89 − R\$ 8,00 = R\$ 2,89

04.08. 01) Correto. $50\cdot\frac{120}{100}\cdot\frac{80}{100}=48$

02) Correto. 10% de 30 reais $=0,1\cdot 30=3$ reais

Preço = R\$ 30,00 + R\$ 3,00 = R\$ 33,00

04) Correto. Total investido:

R\$ 15 000,00 + R\$ 10 000,00 = R\$ 25 000,00

Prezuízo (no primeiro):

25% de R\$ 15 000,00 = 0,2 · R\$ 15 000,00

20% de R\$ 15 000,00 = R\$ 3 000,00

Lucro (no segundo):

20% de R\$ 10 000,00 = 0,2 · R\$ 10 000,00

20% de R\$ 10 000,00 = R\$ 2 000,00

No total:

+ R\$ 2000,00 – R\$ 3000,00 = – R\$ 1000,00

Perdeu R\$ 1000,00 do capital investido:

$\frac{1000}{25000}=\frac{1}{25}=0,04=4\%\ \Rightarrow\ \text{Perdeu }4\%$

08) Correto.

↑ Funcionários	↓ (inversa) dias	↓ (inversa) horas / dia
$\frac{7}{n}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{3}{6}$

$\frac{7}{n}=\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{3}\ \Rightarrow\ n=14\text{ funcionários (dobrou)}$

04.09. 01) Incorreto.

Pagando R\$ 810,00, à vista, sobram R\$ 90,00 para investir:

$90\cdot\frac{110}{100}\cdot\frac{110}{100}=108,90$

Assim, João terá R\$ 108,90 aplicados 2 meses após a compra.

02) Correto.

Os R\$ 900,00 ficariam aplicados por um mês, até a data do pagamento da primeira parcela, que seria de R\$ 450,00 (duas parcelas iguais, sem juros):

$900\cdot\frac{110}{100}-450=990-450=540$

Então, se comprar na loja *B*, exatamente após efetuar o primeiro pagamento, ele terá R\$ 540,00 aplicados.

04) Correto.

Primeira parcela (à vista): metade do valor total, com 10% de desconto, ou seja, $\frac{90}{100}\cdot 450=405\text{ reais}$

Segunda parcela (1 mês depois): metade do valor total, sem desconto, ou seja, 450 reais.

Aplicação:

900 – 405 = 495 (valor a ser aplicado após o primeiro pagamento, no ato da compra)

$495\cdot\frac{110}{100}=544,5$ (valor que João terá no dia do pagamento da segunda parcela)

544,5 – 450 = 94,50 (valor que João terá aplicado logo após terminar de pagar pelo produto, 1 mês após a compra)

08) Correto.

Valor aplicado 2 meses após a compra,

– **na loja B**: $540\cdot\frac{110}{100}-450=144\text{ reais}$;

– **na loja C**: $94,50\cdot\frac{110}{100}=103,95\text{ reais}$.

144 > 103,95

Portanto, comprar na loja *B* é financeiramente melhor do que comprar na loja *C*.

16) Incorreto.

A melhor opção sempre depende de como o dinheiro pode ser aplicado, entre outros fatores.

Observe que, neste caso apresentado, a melhor opção, financeiramente, é a da loja *B*, mesmo com a loja *A* oferecendo desconto para pagamento à vista.

04.10. Considerando **P** como sendo o preço após 12 reajustes mensais acumulados de 0,5%, temos:

$$P = 500 \cdot \underbrace{\frac{100{,}5}{100} \cdot \frac{100{,}5}{100} \cdot \frac{100{,}5}{100} \cdot \ldots \cdot \frac{100{,}5}{100}}_{12 \text{ fatores}}$$

$$P = 500 \cdot \left(\frac{100{,}5}{100}\right)^{12}$$

$$P = 500 \cdot 1{,}005^{12}$$

04.11. Se P(A), P(B) e P(C) são os preços médios nas cidades A, B e C, respectivamente, então:

$$P(A) = \frac{(100+9)}{100} \cdot 1000 = \frac{109}{100} \cdot 1000 = 1090 \text{ reais}$$

$$P(B) = \frac{(100+15)}{100} \cdot 1000 = \frac{115}{100} \cdot 1000 = 1150 \text{ reais}$$

$$P(C) = \frac{(100-14)}{100} \cdot 1000 = \frac{86}{100} \cdot 1000 = 860 \text{ reais}$$

a) Incorreto.

Na cidade A ele custa R$ 1090,00.

b) Incorreto.

A diferença entre os preços do produto nas cidades A e C é de R$ 230,00.

c) Correto.

O preço desse produto, na cidade C, é de R$ 860,00.

d) Incorreto.

O produto registra o maior preço na cidade B.

e) Incorreto.

A diferença entre os preços do produto nas cidades A e B é de R$ 60,00. (60 < 100)

04.12. Homens = 48% da população brasileira

Mulheres = 52% da população brasileira

Canhotos = 11% dos homens + 9% das mulheres

$$\text{Canhotos} = \frac{11}{100} \cdot 48\% + \frac{9}{100} \cdot 52\%$$

Canhotos = 5,28% + 4,68%

Canhotos = 9,96% da população brasileira

04.13. $\frac{y}{x} = 2{,}08 \Rightarrow y = 2{,}08x \Rightarrow y = \frac{208}{100} \cdot x$

y = 208% de x = 100% de x + 108% de x

Em relação ao valor de **x** o aumento foi de 108%.

04.14. 18,9% eram alemães e 20,7% eram argentinos. Então,

100% – 18,9% – 20,7% = 60,4% eram de outras nacionalidades.

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ do público das outras nacionalidades não torceu.

Logo, $\frac{3}{4}$ desse público torceu: $\frac{3}{4} \cdot 60{,}4\% = 45{,}3\%$

I. Incorreto

Torceram pela Alemanha:

$$\underbrace{18{,}9\%}_{\text{alemães}} + \underbrace{\frac{3}{5} \cdot 45{,}3\%}_{\text{outras nacionalidades}} = 18{,}9\% + 27{,}18\% = 46{,}08\%$$

II. Correto

Torceram pela Argentina:

$$\underbrace{20{,}7\%}_{\text{argentinos}} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot 45{,}3\%}_{\text{outras nacionalidades}} = 20{,}7\% + 18{,}12\% = 38{,}82\%$$

III. Correto

46,8% – 38,82% = 7,26%

04.15. Primeira mistura:

$$20\text{ kg} + \frac{20}{100} \cdot 20\text{ kg} = 24\text{ kg} \begin{cases} 20\text{ kg de farinha de trigo} \\ 4\text{ kg de farinha de milho} \end{cases}$$

Segunda mistura:

$$24\text{ kg} + \frac{20}{100} \cdot 24\text{ kg} = 28{,}8\text{ kg} \begin{cases} 20\text{ kg de farinha de trigo} \\ 8{,}8\text{ kg de farinha de milho} \end{cases}$$

$$\frac{\text{farinha de milho}}{\text{total de farinha}} = \frac{8{,}8\text{ kg}}{28{,}8\text{ kg}} = \frac{88}{288} = \frac{11}{36}$$

04.16. 01) Correto

$$\frac{1{,}5\text{ km/litro} \cdot 80\text{ litros}}{2{,}8\text{ km/volta}} = \frac{120\text{ km}}{2{,}8\text{ km/volta}} = 42{,}857\ldots\text{ voltas}$$

Com o tanque cheio, terá que abastecer após completar a 42ª volta.

02) Incorreto

$$\frac{90\text{ voltas} \cdot 2{,}8\text{ km/volta}}{1{,}5\text{ km/litro}} = \frac{252\text{ km}}{1{,}5\text{ km/litro}} = 168\text{ litros}$$

$$168\text{ litros} \cdot \text{R\$ } 3{,}82/\text{litro} = \text{R\$ } 641{,}76$$

04) Correto

$$\frac{1{,}5\text{ km/litro} \cdot \left(\frac{75}{100} \cdot 80\text{ litros}\right)}{2{,}8\text{ km/volta}} = \frac{90\text{ km}}{2{,}8\text{ km/volta}} = 32{,}142\ldots\text{voltas}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 90\text{ voltas} = 30\text{ voltas}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 90\text{ voltas} = 40\text{ voltas}$$

$$30 < 32{,}142\ldots < 40$$

08) Correto

$$\frac{2{,}8\text{ km/volta} \cdot 90\text{ voltas}}{1{,}5\text{ km/litro}} = 168\text{ litros}$$

04.17. $\text{Lucro} = \frac{3}{100} \cdot 50000 - \frac{4}{100} \cdot 10000 - \frac{5}{100} \cdot 10000$

Lucro = 1500 – 400 – 500

Lucro = 600

Resposta: R$ 600,00

04.18. 100 pessoas = 97 homens + 3 mulheres

(97 – x) homens = 96%

3 mulheres = 4%

$$\frac{97-x}{3} = \frac{96\%}{4\%}$$

$$\frac{97-x}{3} = 24 \Rightarrow 97 - x = 72 \Rightarrow x = 25$$

Deverão sair 25 homens.

04.19. Considere que, dos 1000 carros, **x** tinham motor "flex" e o restante, 1000 – x, tinham motor a gasolina.

Após a conversão, são bicombustíveis os carros que eram a gasolina e foram convertidos e os que eram "flex" e **não foram** convertidos. Portanto:

$$\frac{36}{100}\cdot\underbrace{(1000-x)}_{\text{a gasolina}}+\frac{64}{100}\cdot\underbrace{x}_{\text{flex}}=556$$

$$360-0{,}36x+0{,}64x=556$$

$$0{,}28x=196 \Rightarrow x=700$$

Dos 1000 carros da empresa, 700 eram "flex".

São tricombustíveis 36% dos carros que eram "flex" e sofreram conversão para funcionar também com gás GNV:

$$36\%\text{ de }700=\frac{36}{100}\cdot 700=252$$

04.20. $\text{Salário novo}=(\text{salário antigo})\cdot\frac{140}{100}\cdot\frac{110}{100}$

$\text{Salário novo}=(\text{salário antigo})\cdot 1{,}54$

$\text{Salário novo}=154\%\text{ do salário antigo}$

Portanto, o salário de José teve um aumento percentual de 54%.

04.21. $33\%\text{ do total }+25\%\text{ do total}=58\%\text{ do total}$

$58\%\text{ de }25000\text{ litros}=0{,}58\cdot 25000\text{ litros}=14500\text{ litros}$

A adolescente consumiu 40% desses 14 500 litros, ou seja, consumiu $0{,}40\cdot 14500\text{ litros}=5800\text{ litros}$

Aula 05

05.01. Total de alunos: 4 + 5 + 3 + 1 + 2 + 5 = 20.

Alunos com 16 ou 17 anos: 4 + 5 = 9

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow\text{(direta)} \\ 20 & — & 100\% \\ 9 & — & 20\% \end{array}$$

$$20\cdot x=9\cdot 100\% \Rightarrow x=45\%$$

05.02.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow\text{(direta)} \\ 360° & — & 100\% \\ x & — & 20\% \end{array}$$

$$x\cdot 100=360°\cdot 20 \Rightarrow x=72°$$

05.03. Novo valor = x + 300% de x

Novo valor = x + 3x = 4x

05.04. Considerando que **x** é o valor do salário bruto de Paulo:

$$R\$\,1518{,}00=(100\%-8\%)\text{ do }\underbrace{\text{salário bruto}}_{x}$$

$$R\$\,1518{,}00=92\%\text{ de }x$$

$$R\$\,1518{,}00=0{,}92\cdot x$$

$$x=\frac{R\$\,1518{,}00}{0{,}92} \Rightarrow x=R\$\,1650{,}00$$

Outra maneira:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow\text{(direta)} \\ 1518 & — & 92\% \\ x & — & 100\% \end{array}$$

$$1518\cdot 100=92\cdot x \Rightarrow x=1650$$

$$\text{Salário bruto}=R\$\,1650{,}00$$

05.05.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow\text{(direta)} \\ 150 & — & 100\% \\ 60 & — & x \end{array}$$

$$150\cdot x=60\cdot 100\% \Rightarrow x=40\%\quad\text{(aprovados)}$$

Se 40% dos alunos foram aprovados, então 60% reprovaram.

05.06. Se o preço do litro de gasolina sofreu um acréscimo de 5%, então o volume de gasolina que custava R$ 100,00 passou a custar R$ 105,00. Portanto:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow\text{(direta)} \\ 105\text{ reais} & — & 100\%\text{ do volume} \\ 100\text{ reais} & — & x\%\text{ do volume} \end{array}$$

$$105\cdot x=100\cdot 100 \Rightarrow x\cong 95{,}24$$

$$95{,}24\%-100\%=-4{,}76\%$$

$$x\%\text{ inferior}\cong 4{,}76\%\text{ inferior} \Rightarrow x\cong 4{,}76$$

$$4.70<4.76<4.80$$

05.07. Retângulo antigo:

$$\begin{cases}\text{Largura}=a\\ \text{Comprimento}=b\end{cases} \Rightarrow \text{Área}_{(\text{antiga})}=b\cdot a$$

Retângulo novo:

$$\begin{cases}\text{Largura}=1{,}4\cdot a\\ \text{Comprimento}=0{,}65\cdot b\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Área}_{(\text{nova})}=(0{,}65\cdot b)\cdot(1{,}4\cdot a)\\ \text{Área}_{(\text{nova})}=0{,}91\cdot(b\cdot a)\end{array}$$

$$\text{Área}_{(\text{nova})}=0{,}91\cdot\text{Área}_{(\text{antiga})}$$

$$\text{Área}_{(\text{nova})}=91\%\text{ da Área}_{(\text{antiga})}$$

Portanto, redução de 9%.

05.08. a) Custo final do metro quadrado:

$$R\$\,15{,}00+5\%\text{ de }R\$\,15{,}00$$

$$R\$\,15{,}00+R\$\,0{,}75=R\$\,15{,}75$$

b) $\text{Área máxima}=\dfrac{R\$\,7560{,}00}{R\$\,15{,}75/m^2}=480\,m^2$

05.09. $(\text{preço de A})+(\text{preço de B})=X$

$(90\%\text{ do preço de A})+(\text{o preço de B})=350\text{ reais}$

$$0{,}9\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot X\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot X\right)=350$$

$$\frac{1{,}8}{3}\cdot X+\frac{1}{3}\cdot X=350 \Rightarrow X=375\text{ reais}$$

R$ 375,00 – R$ 350,00 = R$ 25,00

O cliente deixou de pagar R$ 25,00

05.10.

- $\begin{cases}x+y+z=17000\\ x+y=z\end{cases} \Rightarrow z=8500$

- $\begin{cases}z=8500\\ x+y+z=17000\\ 0{,}1x+0{,}12y+0{,}08z=1580\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=8500\\ 0{,}1x+0{,}12y=900\end{cases}$

- $\begin{cases}x+y=8500\\ 0{,}1x+0{,}12y=900\end{cases} \Rightarrow x=6000\ \text{ e }\ y=2500$

Júlio aplicou, no fundo Y, R$ 2500,00

05.11.

- $\begin{cases} \text{mulheres} = 60\% \text{ de } 800 = 0{,}6 \cdot 800 = 480 \\ \text{homens} = 800 - 480 = 320 \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{mulheres solteiras} = 85\% \text{ de } 480 = 0{,}85 \cdot 480 = 408 \\ \text{mulheres casadas} = 480 - 408 = 72 \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{homens casados} = 40\% \text{ de } 320 = 0{,}40 \cdot 320 = 128 \\ \text{homens solteiros} = 320 - 128 = 192 \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{pessoas casadas} = 200 \\ \text{pessoas solteiras} = 600 \end{cases}$

Portanto:

- $\begin{cases} \text{pessoas casadas} = 200 \\ \text{pessoas solteiras} = 600 \end{cases}$

01) Correto
$25\% \text{ de } 800 = 0{,}25 \cdot 800 = 200$

02) Correto
$\frac{3}{4} \cdot 800 = 600$

04) Incorreto
$600 = 3 \cdot 200$
O número de pessoas solteiras é o triplo do número de pessoas casadas.

08) Correto
$\frac{1}{3} \cdot 600 = 200$

05.12. I. Correto

$\frac{\text{meninos}}{\text{meninas}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{meninos} = 5 \text{ partes} \\ \text{meninas} = 3 \text{ partes} \end{cases} \Rightarrow \text{total} = 8 \text{ partes}$

↓ ↓ (direta)
8 partes —— 100%
3 partes —— x

$8 \cdot x = 100\% \cdot 3 \Rightarrow x = 37{,}5\%$

II. Correto
Gastou **x** reais (40%) e ficou com R$ 570,00 (60%):

↓ ↓ (direta)
60% —— 570
40% —— x

$60 \cdot x = 570 \cdot 40 \Rightarrow x = 380$

A pessoa gastou R$ 380,00

III. Correto
Se **x** litros de água correspondem a 25% da mistura, então os 840 litros de tinta correspondem a 75% dessa mistura:

↑ ↑ (direta)
x —— 25%
840 litros —— 75%

$75 \cdot x = 25 \cdot 840 \text{ litros} \Rightarrow x = 280 \text{ litros}$

IV. Incorreto

$\frac{\text{segundo pagamento}}{\text{primeiro pagamento}} = \frac{108\%}{92\%} \cong 1{,}174$

$\text{segundo pagamento} \cong 1{,}174 \cdot (\text{primeiro pagamento})$

Portanto, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, um acréscimo de aproximadamente 17,4%.

05.13. Em 2011:

$\text{Volume}_{(\text{biodiesel})} = \frac{5}{100} \cdot 52 \text{ milhões de litros}$

$\text{Volume}_{(\text{biodiesel})} = 2{,}6 \text{ milhões de litros}$

Em 2013:

$\text{Volume}_{(\text{biodiesel})} = 2{,}6 \text{ milhões de litros} = 7\% \text{ da mistura}$

Considerando os volumes em milhões de litros, temos:

↑ ↑ (direta)
2,6 —— 7%
$V_{(\text{mistura})}$ —— 100%

$7 \cdot V_{(\text{mistura})} = 2{,}6 \cdot 100 \Rightarrow V_{(\text{mistura})} \cong 37$

05.14. a) Incorreto

$\frac{n_{(2012)}}{n_{(2004)}} = \frac{3270}{2000} = 1{,}635 \Rightarrow n_{(2004)} = 163{,}5\% \text{ de } n_{(2004)}$

$n_{(2012)} = 163{,}5\% \text{ de } n_{(2004)} \Rightarrow$ em 2012, o número de tainhas pescadas foi 63,5% maior do que em 2004.
Considerando o mesmo peso médio e o mesmo preço de venda, o valor arrecadado em 2012 também é 63,5% maior que o de 2004.

b) Incorreto
Em 2012, o dono do barco recebeu mais do que R$ 800,00:
$\frac{1}{3} \cdot (\text{R\$ } 5{,}00/\text{kg} \cdot 5000 \text{ kg}) \cong \text{R\$ } 8333{,}33 > \text{R\$ } 8000{,}00$

c) Incorreto
Em 2004 foram pescados 1270 **peixes** a menos que em 2012, e não 1270 kg a menos.
3270 peixes $\Rightarrow$ 5000 kg. Ou seja:
3270 peixes $\neq$ 3270 kg $\Rightarrow$ 1270 peixes $\neq$ 1270 kg

d) Correto

$\frac{n_{(2004)}}{n_{(2012)}} = \frac{2000}{3270} \cong 0{,}61 \Rightarrow n_{(2004)} \cong 61\% \text{ de } n_{(2012)}$

$n_{(2004)} \cong 61\% \text{ de } n_{(2012)} \Rightarrow$ em 2004, o número de tainhas pescadas foi aproximadamente 39% menor do que em 2012.

05.15. Opção 1:
Se pagar no dia 8, ficará devendo 1200 euros ($2300 - 3500 = -1200$), deverá pagar juros de 2% sobre o saldo negativo diário, por 2 dias:

$\text{Dívida após 2 dias} = (1200 \cdot 1{,}02) \cdot 1{,}02 = 1248{,}48$

$1248{,}48 - 1200 = 48{,}48 \Rightarrow \text{JUROS} = 48{,}48 \text{ euros}$

Opção 2:
Se pagar no dia 10, deverá pagar multa de 2% sobre o valor da prestação (3500 euros):

$0{,}02 \cdot 3500 = 70 \Rightarrow \text{JUROS} = 70 \text{ euros}$

$70 \text{ euros} - 48{,}48 \text{ euros} = 21{,}52 \text{ euros} \Rightarrow$ Se escolher a opção 2 terá, em relação à opção 1, desvantagem de 21,52 euros.

05.16. $(C + 1200) \cdot \overbrace{0{,}89}^{100\% - 11\%} = C - 32$

$0{,}89 \cdot C + 1068 = C - 32 \Rightarrow C = 10000$

05.17. $100\% - 10\% = 90\% \Rightarrow$ Com redução de 10% ao ano, em três anos o número de analfabetos passará de 700 milhões para n milhões. Ou seja:

$n \text{ milhões} = (700 \text{ milhões}) \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$

$n \text{ milhões} = 510{,}3 \text{ milhões} \Rightarrow n = 510{,}3$

05.18. Renda *per capita* = $\dfrac{\text{PIB}}{\text{População}}$

Na China, em 2009:

$$\text{Renda } \textit{per capita} = \frac{\text{PIB chinês}}{\text{População chinesa}}$$

$$3620 \text{ dólares} = \frac{4{,}9 \cdot 10^{12} \text{ dólares}}{\underset{\substack{\downarrow \\ 19{,}7\%}}{0{,}197} \cdot (\text{População mundial})}$$

$$\text{População mundial} = \frac{4{,}9 \cdot 10^{12}}{0{,}197 \cdot 3620}$$

$$\text{População mundial} \cong 6{,}87 \cdot 10^{9} \text{ pessoas}$$

Dos números apresentados, o que está mais próximo da população mundial, em 2009, é $6{,}8 \cdot 10^9$.

05.19. Aumento de 10%

Garrafa antiga: $\dfrac{\text{R\$ } 1{,}80}{600 \text{ mL}} = \text{R\$ } 0{,}003/\text{mL}$

Garrafa nova: $\dfrac{\text{R\$ } 1{,}65}{500 \text{ mL}} = \text{R\$ } 0{,}0033/\text{mL}$

$\dfrac{\text{preço novo}}{\text{preço antigo}} = \dfrac{\text{R\$ } 0{,}0033}{\text{R\$ } 0{,}003} = 1{,}1 = 110\% \Rightarrow$ houve, no preço, um aumento de 10%

05.20. Desconto de 24,1%

Preço inicial: P

Preço final:

$$P \cdot \overset{\substack{+10\% \\ \uparrow}}{1{,}1} \cdot \overset{\substack{+15\% \\ \uparrow}}{1{,}15} \cdot \overset{\substack{-40\% \\ \uparrow}}{0{,}6} = 0{,}759 \cdot P$$

desconto = (preço final) – (preço inicial)

desconto = $0{,}759 \cdot P - P = 0{,}241 \cdot P$

desconto = 24,1% de P

Portanto, em relação ao preço inicial, o desconto foi de 24,1%.

Aula 06

06.01. a) Incorreto

O ângulo obtuso é o maior ângulo interno desse triângulo, e ao maior ângulo interno se opõe o maior lado.

b) Incorreto

Considerando que α, β e θ são as medidas dos ângulos internos desse triângulo, com $90° < \theta < 180°$, temos que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \theta = 180° \\ 90° < \theta < 180° \end{cases} \Rightarrow 0 < \alpha + \beta < 90° \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha < 90° \\ \text{e} \\ 0 < \beta < 90° \end{cases}$$

Portanto, os outros dois ângulos internos desse triângulo são, necessariamente, agudos.

c) Incorreto

Do item "b", temos que os outros dois ângulos internos desse triângulo são, necessariamente, agudos.

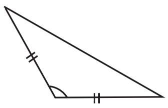
d) Incorreto

Se esse triângulo tem apenas um ângulo interno obtuso, então tem um, e apenas um, ângulo externo agudo.

e) Correto

O triângulo **pode** ser isósceles.

O triângulo da figura a seguir é um exemplo de triângulo que tem um ângulo interno obtuso e é isósceles.

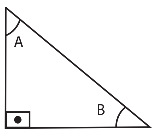


06.02. A = 90° – 40° ⇒ A = 50°

B = 180° – 40° ⇒ B = 140°

C = 360° – 40° ⇒ C = 320°

06.03.



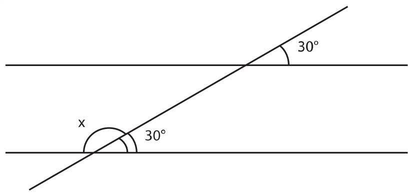
Sabendo que os ângulos agudos de um triângulo retângulo qualquer sempre são complementares, temos:

$$(3x - 20°) + (2x + 10°) = 90° \Rightarrow x = 20°$$

$$x = 20° \Rightarrow \begin{cases} 3x - 20° = 3 \cdot 20° - 20° = 40° \\ \text{e} \\ 2x + 10° = 2 \cdot 20° + 10° = 50° \end{cases}$$

Então, o menor ângulo desse triângulo mede 40°.

06.04.



x + 30° = 180° ⇒ x = 150°

06.05. Se o ângulo mede **x** graus, então:

– o seu complemento mede 90° – x

– o seu suplemento mede 180° – x

$$\text{suplemento de } x = \frac{\text{complemento de } x}{2} + 100°$$

$$180° - x = \frac{90° - x}{2} + 100°$$

$$80° - x = \frac{90° - x}{2}$$

$$160° - 2x = 90° - x \Rightarrow x = 70°$$

06.06. I. Incorreto.

Em um triângulo, todos os ângulos externos serão maiores que qualquer ângulo interno se, e somente se, esse triângulo for acutângulo.

II. Correta.

Todo triângulo tem, pelo menos, dois ângulos internos agudos. Ou seja, em qualquer triângulo, no máximo um dos ângulos internos não é agudo.

Considerando que α, β e θ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, com $90° < \theta$ 180°, temos que:

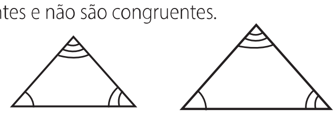
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\theta=180° \\ 90° \le \theta < 180° \end{cases} \Rightarrow 0<\alpha+\beta\le 90° \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 0<\alpha<90° \\ \text{e} \\ 0<\beta<90° \end{matrix} \right.$$

Portanto, todo triângulo tem, pelo menos, dois ângulos internos agudos.

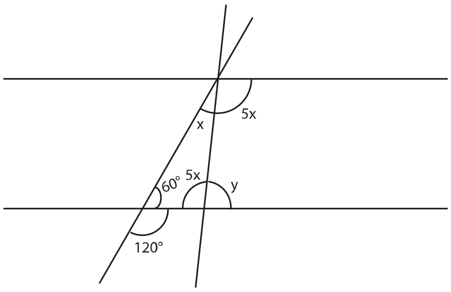
III. Incorreto.

Se dois triângulos têm seus ângulos respectivamente congruentes, então esses triângulos são **semelhantes**. Para serem congruentes, os lados correspondentes também devem ter as mesmas medidas.

Observe o exemplo da figura a seguir, onde os triângulos são semelhantes e não são congruentes.

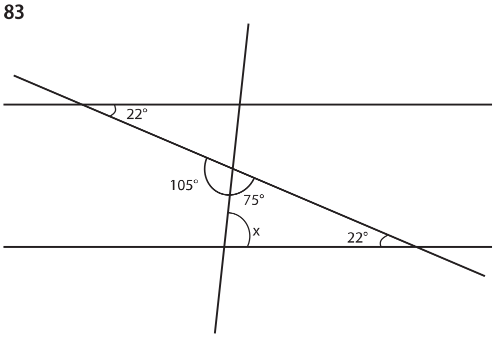


06.07.



- Do triângulo: $x + 5x + 60° = 180° \Rightarrow x = 20°$
- $y + 5x = 180° \Rightarrow y + 5 \cdot 20° = 180° \Rightarrow y = 80°$

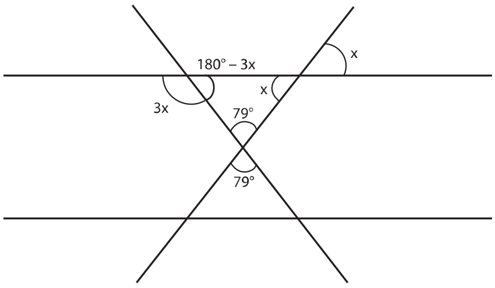
06.08. **83**



Da figura acima, temos que:

$x + 75° + 22° = 180° \Rightarrow x = 83°$

06.09.



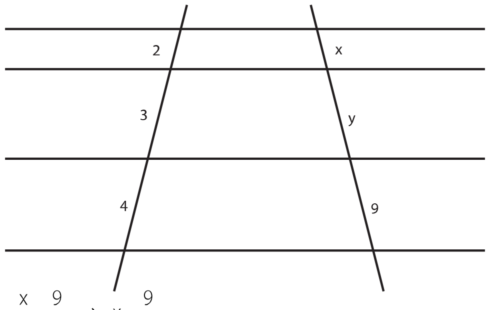
Do triângulo em destaque:

$(180° - 3x) + x + 79° = 180°$

$-2x + 79° = 0$

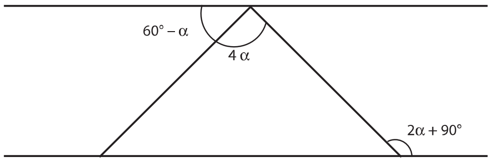
$2x = 79° \Rightarrow x = 39,5° \Rightarrow x = 39°\ 30'$

06.10.



- $\dfrac{x}{2} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow x = \dfrac{9}{2}$
- $\dfrac{y}{3} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow y = \dfrac{27}{4}$

06.11.



Ângulos alternos internos são congruentes. Portanto:

$(60° - \alpha) + 4\alpha = 2\alpha + 90° \Rightarrow \alpha = 30°$

* 30 é um divisor de 60.

06.12.
- $y + 80° = 92° \Rightarrow y = 12°$
- $3x + (x + y) + 3x = 180°$

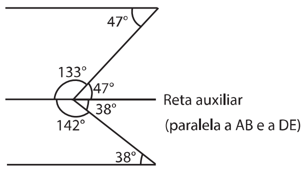
  $7x + y = 180°$

  $7x + 12° = 180° \Rightarrow x = 24°$
- $5x + 4y = 5 \cdot 24° + 4 \cdot 12°$

  $5x + 4y = 120° + 48°$

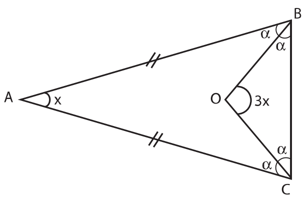
  $5x + 4y = 168°$

06.13.



$x = 133° + 142° \Rightarrow x = 275°$

06.14.



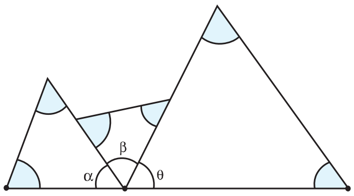
$x = ?$

Dos triângulos ABC e BOC, temos que:

$$\begin{cases} x+2\alpha+2\alpha=180° \\ 3x+\alpha+\alpha=180° \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4\alpha=180° \\ 3x+2\alpha=180° \end{cases} \Rightarrow x=36°$$

06.15.



Soma das medidas de todos os ângulos internos dos três triângulos:

$$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

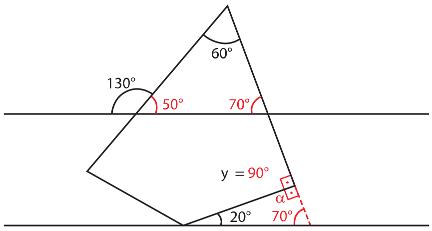
Sendo **x** a soma das medidas dos ângulos destacados em cinza, temos que:

$x + (\alpha + \beta + \theta) = 540^\circ$

$x + 180^\circ = 540^\circ$

$x = 360^\circ$

06.16.



Da figura, é fácil verificar que

$\alpha + 20^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

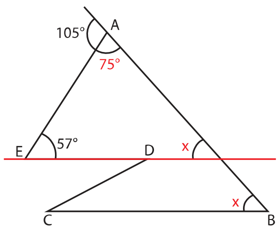
$\alpha + y = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 90^\circ$

06.17.

$$\begin{cases} A+B=90^\circ \\ \dfrac{A}{B}=\dfrac{13}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=90^\circ \\ 17A-13B=0 \end{cases} \Rightarrow A=39^\circ \text{ e } B=51^\circ$$

$$\frac{\text{suplemento de A}}{\text{suplemento de B}} = \frac{180^\circ - 39^\circ}{180^\circ - 51^\circ} = \frac{141^\circ}{129^\circ} = \frac{47}{43}$$

06.18.



Os ângulos destacados em amarelo são congruentes, pois ED // CB.

Do triângulo destacado em cinza:

$x + 57^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 48^\circ$

Portanto, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 48°.

06.19. Se o maior dos dois ângulos suplementares mede **x** graus, então o menor mede (180° – x).

$\frac{2}{3}$ do maior $= \left(\frac{3}{4}\text{ do menor}\right) + 69^\circ$

$\frac{2}{3} \cdot (180^\circ - x) = \frac{3}{4} \cdot x + 69^\circ$

$120^\circ - \frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x + 69^\circ$

$120^\circ - 69^\circ = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x$

$51^\circ = \frac{17x}{12} \Rightarrow x = 36^\circ$

$x = 36^\circ \Rightarrow 180^\circ - x = 144^\circ$

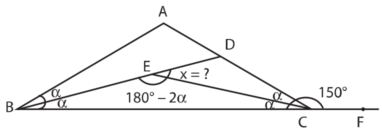
Então, 36° e 144° são as medidas dos dois ângulos suplementares.

06.20. O triângulo ABC é isósceles, pois os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm a mesma medida. Logo, os ângulos $A\hat{B}C$ e ACB são congruentes.

Do enunciado, temos ainda que med$(A\hat{B}D)$ = med$(C\hat{B}D)$ e med(BCE) = med(DCE)

Pode-se concluir então que

med$(A\hat{B}D)$ = med$(C\hat{B}D)$ = med(BCE) = med(DCE), conforme indicado na figura a seguir.



Da figura, temos que:

(I): $(180^\circ - 2\alpha) + x = 180^\circ \Rightarrow x = 2\alpha$

(II): $2\alpha + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 30^\circ$

De **(I)** e **(II)**, segue que x = 30°. Ou seja, o ângulo $(D\hat{E}C)$ mede 30°.

Aula 04

04.01. $\begin{cases} \alpha = \dfrac{L}{R} \\ \alpha = 1\,\text{radiano} \\ L = 9\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow 1 = \dfrac{9}{R} \Rightarrow r = 9\text{ cm}$

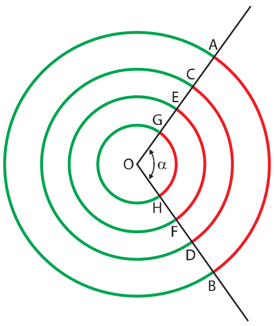
diâmetro = 2 · R ⇒ diâmetro = **18 cm**

04.02. Sendo α a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros desse relógio, temos que: $\alpha = 2 \cdot \dfrac{2\pi\,\text{rad}}{12} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}\,\textbf{rad}$

04.03. $\dfrac{2\pi\,\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{80^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{9}\,\textbf{rad}$

04.04. Comprimento do arco $= \underbrace{\dfrac{1}{4}}_{(1/4\text{ de volta})} \cdot \underbrace{24\pi\text{ cm}}_{(1\text{ volta})} = \mathbf{6\pi\text{ cm}}$

04.05. Os 4 arcos, destacados em vermelho, correspondem ao mesmo ângulo central α, mas estão contidos em circunferências de comprimentos diferentes. Portanto, é correto afirmar que:
são arcos de comprimentos diferentes.



* A medida desses arcos, em graus ou radianos, é a mesma!

04.06. Se α é a medida do menor arco determinado por duas das marcas consecutivas que dividem o relógio (da figura do enunciado), então

$\alpha = \dfrac{2\pi\,\text{rad}}{12 \cdot 5} = \dfrac{2\pi\,\text{rad}}{60} = \dfrac{\pi}{30}\,\textbf{rad}$

04.07. * Lembre que:

$360^\circ = 2\pi\,\text{rad}; \quad 180^\circ = \pi\,\text{rad}; \quad 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad}$

Resolução:
A cada hora, o ponteiro das horas gira 30° e o dos minutos, 360°.
Portanto, se o dos minutos girar $180^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 360^\circ$, o das horas descreverá um arco que mede $\dfrac{1}{2} \cdot 30^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} = \dfrac{\pi}{12}\,\textbf{rad}$

Ou ainda,

Ponteiro dos minutos	↓ (diretamente proporcional) Ponteiro das horas
$\dfrac{2\pi\,\text{rad}}{\pi\,\text{rad}}$ =	$\dfrac{\frac{\pi}{6}\,\text{rad}}{x}$

$2x = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12}\,\textbf{rad}$

04.08. $\dfrac{180^\circ}{\pi\,\text{rad}} = \dfrac{40^\circ}{x} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{9}\,\textbf{rad}$

04.09. 18 · (2 + b) = 45 ⇒ b = 0,5

Sabendo que o comprimento de um arco é diretamente proporcional à sua medida (em graus ou radianos), temos que:

$\dfrac{45}{360^\circ} = \dfrac{0{,}5}{x} \Rightarrow x = 4^\circ$

O arco de comprimento **b** mede **4°**.

04.10. Em 60 min (1 hora), o ponteiro dos minutos descreve um arco de uma volta, cujo comprimento é igual a $2\pi r$ (comprimento da circunferência).
Sendo r = 12 cm (medida do ponteiro), a distância **x** percorrida pela extremidade do ponteiro, em 20 min, é tal que:

$\dfrac{60\text{ min}}{2 \cdot \pi \cdot 12\text{ cm}} = \dfrac{20\text{ min}}{x} \Rightarrow x = 8\pi\text{ cm}$

$x = 8\pi\text{ cm} \Rightarrow x \cong 8 \cdot 3{,}14 \Rightarrow x \cong 25{,}12\text{ cm}$

$x \cong 25{,}12\text{ cm} \Rightarrow x \cong \mathbf{25{,}1\text{ cm}}$

04.11. Diâmetro = 135 m ⇒ 2r = 135 m
As 32 cabines determinam, na circunferência da roda gigante, 32 arcos congruentes. Mas apenas 4 desses arcos compõem o arco formado por cinco cabines consecutivas. Portanto,

comprimento do arco $= 4 \cdot \dfrac{2\pi r}{32} = 4 \cdot \dfrac{2r \cdot \pi}{32} = 4 \cdot \dfrac{135\pi}{32}$

comprimento do arco $= \dfrac{135\pi}{8}\,\textbf{cm}$

Atenção: neste teste, o autor se refere ao comprimento do arco quando pede para calcular a medida do mesmo.

04.12. Ponteiro dos minutos:

$\dfrac{60\text{ min}}{50\text{ min}} = \dfrac{2\pi\,\text{rad}}{x}$

$x = \dfrac{5\pi}{3}\,\textbf{rad}$

04.13. $\dfrac{2\pi r}{2000\text{ m}} = \dfrac{360^\circ}{300^\circ} \Rightarrow r = \dfrac{1200}{\pi}\text{ m}$

$r = \dfrac{1200}{\pi}\text{ m} \Rightarrow r \cong \dfrac{1200}{3{,}14}\text{ m} \Rightarrow r \cong \mathbf{382\text{ m}}$

04.14. Se **r** é a medida do raio desse círculo, então 2r = 10 cm $\Rightarrow$ r = 5 cm.

$$\alpha = \frac{L}{r}\text{ radianos}$$

$$\alpha_{(x)} = \frac{L_{(x)}}{r} = \frac{\frac{5\pi}{3}\text{ cm}}{5\text{ cm}} \Rightarrow \alpha_{(x)} = \frac{\pi}{3}\text{ rad} \Rightarrow \alpha_{(x)} = 60°$$

$$\alpha_{(x)} = 60° \Rightarrow \alpha_{(y)} = 120°, \text{ pois } \alpha_{(x)} + \alpha_{(y)} = 180°$$

Sendo n(x) = 8 000 o número de eleitores do setor **x** e n(y), o do setor **y**, temos:

$$\frac{\alpha_{(x)}}{\alpha_{(y)}} = \frac{n(x)}{n(y)} \Rightarrow \frac{60°}{120°} = \frac{8000\text{ eleitores}}{n(y)}$$

$$n(y) = \mathbf{16000\ eleitores}$$

04.15. $\alpha = \frac{L}{r}\text{ radianos} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\text{ rad}$

$$\frac{\frac{3}{2}\text{ rad}}{\pi\text{ rad}} = \frac{\alpha}{180°} \Rightarrow \alpha = \frac{270°}{\pi}$$

$$\alpha \cong \frac{270°}{3{,}14} \Rightarrow \alpha \cong \mathbf{86°}$$

04.16.

- $\begin{cases} r = OA = 4\text{ cm} \\ CD = 6\text{ cm} = AB \end{cases} \Rightarrow R = OA + AB = 10\text{ cm}$
- $\begin{cases} \text{comprimento do arco } AC = \ell = 6\text{ cm} \\ \text{comprimento do arco } BD = L \end{cases}$
- $\frac{L}{\ell} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{L}{6\text{ cm}} = \frac{10\text{ cm}}{4\text{ cm}} \Rightarrow L = \mathbf{15\ cm}$

04.17.

Ponteiro dos minutos		Ponteiro das horas (diretamente proporcional)
$\frac{360°}{360° - \alpha}$	=	$\frac{30°}{\alpha}$
$\frac{12}{360° - \alpha}$	=	$\frac{1}{\alpha}$

$$12\alpha = 360° - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{360°}{13}$$

O ponteiro das horas descreveu um arco de medida α em **x** minutos. Portanto, está marcando 6 h **x** min

Ponteiro das horas:

$$\frac{\frac{360°}{13}}{30°} = \frac{x}{60\text{ min}} \Rightarrow x = \frac{720}{13}\text{ min}$$

$$\frac{720}{13}\text{ min} = \left(\frac{715}{13} + \frac{5}{13}\right)\text{min} = \mathbf{55\frac{5}{13}\ min}$$

04.18. A parte que falta da boca do "monstro" é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio do setor circular, pois corresponde a um ângulo central que mede 1 radiano.

De fato:

$$\alpha = \frac{L}{r}\text{ radianos} \Rightarrow 1\text{ rad} = \frac{L}{1\text{ cm}} \Rightarrow L = 1\text{ cm}$$

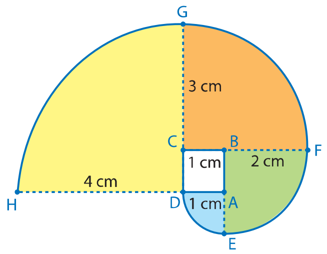
Diminuindo o comprimento desse arco do comprimento da circunferência correspondente e somando a medida de 2 raios, determinamos o perímetro (**contorno**) do "monstro":

perímetro = 2πr – L + 2r

perímetro = 2π · 1 cm – 1 cm + 2 · 1 cm

perímetro = **2π + 1 cm**

04.19.



Os arcos DE, EF, FG e GH têm comprimentos que equivalem a $\frac{1}{4}$ dos comprimentos das circunferências de raios medindo 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm, respectivamente. Sendo **S** a soma dos comprimentos desses arcos, temos:

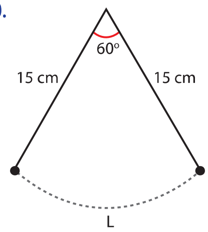
$$S = \frac{1}{4}\cdot(2\pi\cdot 1) + \frac{1}{4}\cdot(2\pi\cdot 2) + \frac{1}{4}\cdot(2\pi\cdot 3) + \frac{1}{4}\cdot(2\pi\cdot 4)$$

$$S = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot(1+2+3+4)$$

$$S = \frac{\pi}{2}\cdot 10 \Rightarrow S = \mathbf{5\pi\ cm}$$

Resposta: A soma dos comprimentos desses arcos é igual a 5π cm.

04.20.



$$r = 15\text{ cm}; \quad \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}\text{ rad}; \quad L = ?$$

$$\alpha = \frac{L}{r}\text{ rad} \Rightarrow \frac{\pi}{3}\text{ rad} = \frac{L}{15\text{ cm}}\text{ rad} \Rightarrow L = 5\pi\text{ cm}$$

$$L \cong 5\cdot 3{,}14\text{ cm} \Rightarrow L \cong \mathbf{15{,}7\ cm}$$

Resposta: A extremidade desse pêndulo descreve um arco de 5π cm de comprimento. Ou seja, um arco de aproximadamente 15,7 cm de comprimento.

Aula 05

05.01. $\begin{array}{r|l} 1320^\circ & 360^\circ \\ \hline 240^\circ & 3 \end{array}$

240° é a menor determinação positiva do arco de 1320°. Logo, esse arco tem extremidade no terceiro quadrante.

05.02. $\begin{array}{r|l} 2045^\circ & 360^\circ \\ \hline \underbrace{245^\circ}_{\downarrow} & 3 \end{array}$

Menor determinação positiva

05.03. Se α é a medida do arco com extremidade em A, então a medida do arco com extremidade em B mede 180° + α (observe a figura do enunciado).

a) **Incorreto**

Os arcos têm extremidades em pontos diferentes ($A \neq B$). Logo, não são côngruos.

b) **Correto**

$(180° + \alpha) - \alpha = 180°$

c) **Incorreto**

$\alpha = 30° \Rightarrow (180° + \alpha) = 180° + 30° = 210° \neq 220°$

d) **Incorreto**

$\alpha + (180° + \alpha) = 180° + 2\alpha \neq 180°$, pois $\alpha \neq 0$.

e) **Incorreto**

$180° + \alpha \neq \alpha$.

05.04. $\frac{14\pi}{3}\text{rad} = \frac{12\pi}{3}\text{rad} + \frac{2\pi}{3}\text{rad} = 4\pi\,\text{rad} + \underbrace{\frac{2\pi}{3}\text{rad}}_{\downarrow}$

Menor determinação positiva

05.05. $x = \underbrace{60^\circ}_{\downarrow} + k \cdot 360^\circ \quad (k \text{ inteiro})$

Menor determinação positiva

Portanto, essa expressão representa os arcos que são côngruos a 60°.

05.06. $\begin{array}{r|l} 1320^\circ & 360^\circ \\ \hline 240^\circ & 3 \end{array} \Rightarrow 1320^\circ = 240^\circ + 3 \cdot 360^\circ$

$-1320^\circ = -(240^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \underbrace{-240^\circ}_{\downarrow} + (-3) \cdot 360^\circ$

Menor determinação negativa

$-240^\circ + 360^\circ = \underbrace{120^\circ}_{\downarrow}$

Menor determinação positiva

O arco de medida –1320° é côngruo ao arco de 120°. Então, sua extremidade pertence ao **segundo quadrante**.

05.07. $\begin{array}{r|l} 1000^\circ & 360^\circ \\ \hline \underbrace{280^\circ}_{\downarrow} & 2 \end{array}$

Menor determinação positiva

05.08. Se $0 < \beta < 90°$ é côngruo a $\alpha = 7632°$, então a medida β é a menor determinação positiva do arco α.

$\begin{array}{r|l} 7632^\circ & 360^\circ \\ \hline \underbrace{72^\circ}_{\downarrow} & 21 \end{array} \Rightarrow \beta = 72^\circ$

Menor determinação positiva

$\frac{72^\circ}{180^\circ} = \frac{\beta}{\pi\,\text{rad}} \Rightarrow \beta = \mathbf{\frac{2\pi}{5}\,rad}$

05.09.

↓ Ponteiro menor		↓ (diretamente proporcional) Ponteiro maior

$$\frac{\frac{\pi}{6}\text{rad}}{\frac{\pi}{12}\text{rad}} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{x}$$

$$2 = \frac{2\pi\,\text{rad}}{x} \Rightarrow x = \pi\,\mathbf{rad}$$

05.10. $r = 44$ cm $= 0{,}44$ m

distância $= 1000 \cdot 2\pi r$

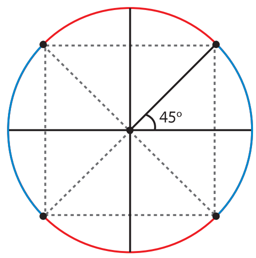
distância $= 1000 \cdot 2\pi \cdot 0{,}44$ m

distância $= 880\pi$ m $= 0{,}88\pi$ km

distância $\cong 0{,}88 \cdot 3{,}14$ km $\cong$ **2,76 km**

2 km < 2,76 km < 3 km

05.11. Cada um dos arcos em destaque na figura a seguir (vermelhos e azuis) medem 90°.



Portanto, sendo **k** um número inteiro, os arcos representados pela expressão $x = k \cdot 90° + 45°$ correspondem a exatamente 4 pontos distintos na circunferência trigonométrica, conforme indicado na figura anterior.

05.12. $\begin{array}{r|l} 7344^\circ & 360^\circ \\ \hline \underbrace{144^\circ}_{\downarrow} & 20 \end{array}$

Menor determinação positiva

$\frac{180^\circ}{\pi\,\text{rad}} = \frac{144^\circ}{x} \Rightarrow x = \mathbf{\frac{4\pi}{5}\,rad}$

05.13. $\begin{array}{r|l} 5000^\circ & 360^\circ \\ \hline 320^\circ & 13 \end{array} \Rightarrow 5000^\circ = 13 \cdot 360^\circ + 320^\circ$

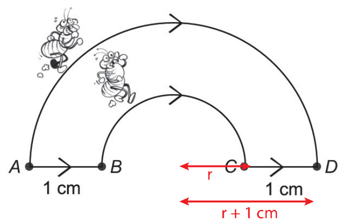
Assim sendo, temos que

$-5000^\circ = -(13 \cdot 360^\circ + 320^\circ) = \underbrace{-320^\circ}_{\downarrow} + (-13) \cdot 360^\circ$

Primeira determinação negativa

Menor determinação positiva: –320° + 360° = **40°**

05.14. A primeira formiga andou uma distância (d_1) igual ao comprimento do semicírculo maior, cujo raio mede r + 1 cm, e a segunda, uma distância (d_2) igual à soma do comprimento do semicírculo menor, de raio r cm, com os comprimentos dos segmentos AB e CD.



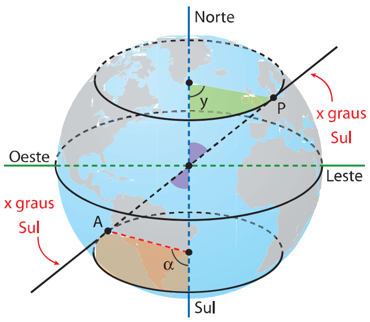
Portanto, sabendo que $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ é comprimento de uma circunferência de raio r, temos que:

$$d_2 - d_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r+1)}{2} - \left(1 + \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} + 1\right)$$

$$d_2 - d_1 = (\pi r + \pi) - (\pi r + 2)$$

$$d_2 - d_1 = \boldsymbol{\pi - 2 \text{ cm}}$$

05.15. Considerando a superfície terrestre como sendo perfeitamente esférica, tome o ponto **A** como sendo o antípoda do ponto **P**, conforme representado na figura a seguir.

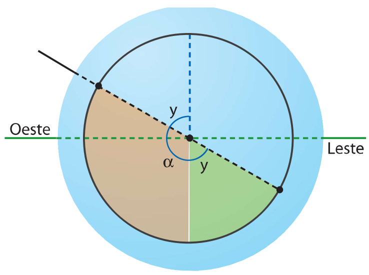


Os pontos **A** e **P**, que são extremos de um mesmo diâmetro, são simétricos em relação ao centro da Terra (a reta que os contém passa pelo centro da Terra e ambos estão na superfície terrestre). Logo, os paralelos que os contêm (os círculos menores da figura) são simétricos em relação à linha do Equador. Portanto, todos os pontos pertencentes ao paralelo que contém o ponto **P** têm latitude **x** graus Norte e, pela simetria, todos os pontos do paralelo que contém **A** têm latitude **x** graus Sul. Ou seja:

o antípoda de **P** tem **latitude x graus Sul**.

Observe ainda, na figura anterior, que o ponto **P** tem longitude **y** graus leste, enquanto o ponto **A** tem longitude α graus oeste, de tal forma que $y + \alpha = 180°$.

A relação entre α e **y** é facilmente verificada quando os setores circulares correspondentes são projetados, ortogonalmente, sobre o círculo máximo que contém a linha do Equador. Note que os dois círculos menores da figura anterior (os paralelos) são congruentes e coincidem nessa projeção:



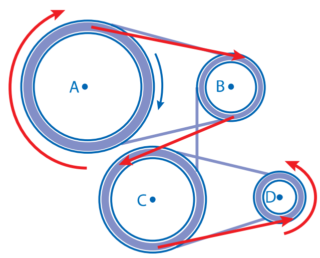
Conforme podemos verificar na última figura, temos que

$$\alpha + y = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - y.$$

Portanto, o antípoda de **P**, o ponto **A**, tem

longitude (180 – y) graus oeste.

05.16. Observe, na figura, que o disco **D** gira no sentido anti-horário.



O número de voltas é inversamente proporcional ao diâmetro:

	↓ (inversamente proporcional) Diâmetro	↑ Número de voltas
Disco A	**8 cm**	1
Disco D	**2 cm**	x

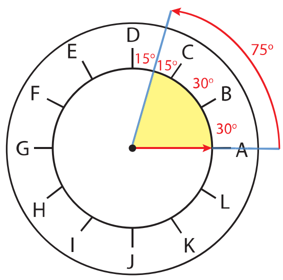
$$\frac{8}{2} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \mathbf{4\ voltas}$$

Portanto, o disco **D dá 4 voltas no sentido anti-horário**.

05.17. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \text{rad} = +\frac{5\pi}{12} \text{rad}$

$$\frac{5\pi}{12} \text{rad} = 75° = 30° + 30° + \frac{30°}{2}$$

Mas o menor arco determinado por duas posições consecutivas quaisquer mede 30° $\left(\text{pois } \frac{360°}{12} = 30°\right)$



Portanto, o cofre será aberto quando a seta estiver indicando o **ponto médio entre C e D**.

- $10\,h - 1\,h = 9\,h \Rightarrow \Delta t = 9\,h$
- diâmetro $= 7\,m \Rightarrow 2R = 7\,m$

05.18.

↓ Ponteiro das horas		↓ (diretamente proporcional) Comprimento do arco
$\frac{12\,h}{9\,h}$	=	$\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{x}$
$\frac{4}{3}$	=	$\frac{\pi \cdot (2R)}{x}$

$$x = \frac{3 \cdot \pi \cdot (2R)}{4}$$

$$x \cong \frac{3 \cdot 3{,}1416 \cdot (7\,m)}{4} \Rightarrow \mathbf{x \cong 16{,}5\,m}$$

Ponteiro dos minutos		↓ (diretamente proporcional) Medida do arco
$\dfrac{1\,h}{9\,h}$	=	$\dfrac{2\pi\ rad}{\alpha}$

$$\alpha = 18\pi\ rad$$

O ponteiro desloca-se no sentido horário (sentido negativo). Portanto, o arco mede $-$**18π radianos**.

Conclusão:

Ao se deslocarem de 1 h para 10 h, o ponteiro das horas percorre um arco de 16,5 metros (**comprimento** aproximado do arco) e o dos minutos, um arco de -18π radianos (**medida** do arco).

05.19. a) **25 km/h**;

$$V_{média} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{9000\ km}{30\ dias} = \frac{9000\ km}{30 \cdot 12\ h} = \mathbf{25\ km/h}$$

b) **1,40625 rad**

$$\alpha = \frac{L}{r}\ radianos$$

$$\alpha = \frac{9000\ km}{6400\ km}\ radianos$$

$$\alpha = \mathbf{1{,}40625\ rad}$$

05.20. $0 \le x \le 2\pi$

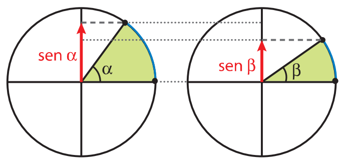
$$0 \le \frac{k\pi}{12} \le 2\pi$$

$$0 \le k\pi \le 24\pi \Rightarrow 0 \le k \le 24$$

Portanto, o número total de arcos da forma $x = \dfrac{k\pi}{12}$ rad, para $k \in \mathbb{Z}$, é igual ao número de elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 24}. Ou seja, um total de **25 arcos**.

Aula 06

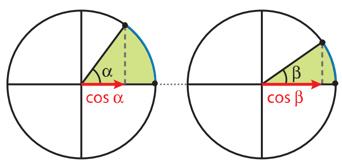
06.01. **V – F – V – V – F – V**

- Sabe-se que $-1 \le sen(x) \le 1$. Portanto, 1 é o valor máximo e -1 é o valor mínimo para o seno de um arco qualquer. Assim, podemos analisar a veracidade das três primeiras afirmações:
  (V) O maior valor possível do seno de um arco é 1.
  (F) O menor valor possível do seno de um arco é 0.
  (V) O menor valor possível do seno de um arco é -1
- O **seno** é positivo para arcos do primeiro e do segundo quadrante, e negativo para arcos do terceiro e quarto quadrantes. Logo, a quarta afirmação é verdadeira e a quinta, é falsa:
  (V) Se um arco x pertence ao 2º quadrante, então sen x > 0.
  (F) Se um arco x pertence ao 4º quadrante, então sen x > 0.
- 

Observe, na figura, que:
Se $0 < \alpha < 90°$, $0 < \beta < 90°$ e $\alpha > \beta$, então $sen\alpha > sen\beta$.

Portanto, a sexta afirmação é verdadeira:
(V) O valor do seno aumenta à medida que o arco aumenta no intervalo de 0° a 90°.

06.02. **V – F – V – F – V – F**

- Sabe-se que $-1 \le cos(x) \le 1$. Assim podemos analisar a veracidade das três primeiras afirmações:
  (V) O maior valor possível do cosseno de um arco é 1.
  (F) O menor valor possível do cosseno de um arco é 0.
  Essa afirmação é falsa, pois -1 é o menor valor para o cosseno.
  (V) O menor valor possível do cosseno de um arco é -1.
- O **cosseno** é positivo para arcos do primeiro e do segundo quadrante, e negativo para arcos do segundo e do terceiro quadrante. Logo, a quarta afirmação é falsa e a quinta, é verdadeira:
  (F) Se um arco x pertence ao 2º quadrante, então cos x > 0.
  (V) Se um arco x pertence ao 4º quadrante, então cos x > 0.
- 

Observe, na figura, que:
Se $0 < \alpha < 90°$, $0 < \beta < 90°$ e $\alpha > \beta$, então $\cos\alpha < \cos\beta$. Ou seja, o valor do cosseno diminui à medida que o arco aumenta no intervalo de 0° a 90°.

Portanto, a sexta afirmação é falsa:
(F) O valor do cosseno aumenta à medida que o arco aumenta no intervalo de 0° a 90°.

06.03. O seno e o cosseno têm sinais contrários para arcos do segundo quadrante (o seno é positivo e o cosseno é negativo) e para arcos do quarto quadrante (o seno é negativo e o cosseno é positivo).
Portanto, sendo **x** um arco para o qual o seno e o cosseno têm sinais contrários, está correto apenas o que se afirma na alternativa **(c)**, pois a extremidade desse arco **pode** pertencer ao segundo quadrante.

06.04. a) **Incorreto**
Há uma infinidade de arcos para os quais o seno é igual a zero:
$sen(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, \pm180°, \pm360°, \pm540°, ...\}$.
b) **Incorreto**
$sen(x) = 0 \Rightarrow cos(x) = 1$ ou $cos(x) = -1$
c) **Incorreto**
O cosseno desse arco também pode ser igual a 1, conforme indicado na alterativa **(b)**.
d) **Correto**
$sen(x) = 0 \Rightarrow tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)} = \dfrac{0}{\pm1} = 0$.
e) **Incorreto**
$sen(x) = 0 \Rightarrow$ o arco **x** tem extremidade no eixo horizontal: no ponto (1, 0) ou no ponto (– 1, 0).

06.05. a) **Incorreto**
O seno de **A** e o cosseno de **A podem** ser diferentes.
b) **Incorreto**
$cosB = -cosD$
c) **Correto**
$senC = senD$
d) **Incorreto**
$cosA = -cosB$
e) **Incorreto**
$senA = -senC$

06.06. 8 rad $\cong$ 8 · 57° = 456° = 360° + 96° $\Rightarrow$ a extremidade do arco α pertence ao segundo quadrante. Portanto: $\mathbf{sen\alpha > 0}$ **e** $\mathbf{cos\alpha < 0}$.

06.07. $\text{sen}45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen}225^\circ = \cos 225^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

06.08.
- $\text{sen}A = \text{sen}\beta = \text{sen}150^\circ = \text{sen}30^\circ = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$
- $\cos B = \cos(\beta + 180^\circ) = \cos(150^\circ + 180^\circ) = \cos 330^\circ$

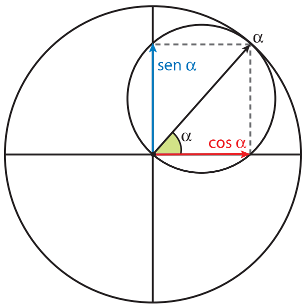
$\cos B = \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

06.09. A abscissa de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica indica o cosseno do arco correspondente, enquanto a ordenada indica o seno do mesmo arco. Portanto, observando a figura do enunciado, temos que:
- $\cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x =$ medida do segmento $\overline{ON}$;
- $\text{sen}\, x > 0 \Rightarrow |\text{sen}\, x| = \text{sen}\, x =$ medida do segmento $\overline{OM}$.

A reta determinada pelo centro da circunferência trigonométrica e pela extremidade do arco intersecta, no ponto **P**, a reta que tangencia a circunferência no ponto A (1, 0). Portanto, **P** indica a tangente do arco correspondente. Então, da figura do enunciado, pode-se concluir que
- $\text{tg}\, x < 0 \Rightarrow |\text{tg}\, x| = -\text{tg}\, x =$ medida do segmento $\overline{AP}$;

06.10. Tomando o lado AB como base do triângulo OAB, temos:
– a medida da base AB é igual a 2 · sen α;
– a medida da altura relativa à base AB é igual a cosα;
– $\text{Área}_{(OAB)} = \dfrac{(2 \cdot \text{sen}\alpha) \cdot (\cos\alpha)}{2} = \mathbf{sen\alpha \cdot cos\alpha}$.

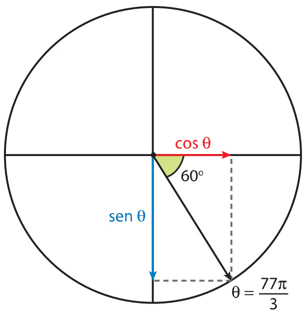
06.11. A seta indica um ângulo central. Portanto, as intersecções da borda do disco **B** com os eixos perpendiculares indicam o seno e o cosseno do ângulo central correspondente, conforme podemos observar na figura a seguir.



06.12. $\theta = \dfrac{77\pi}{3} = \dfrac{78\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 26\pi - \dfrac{\pi}{3} = 13 \cdot (2\pi) - \dfrac{\pi}{3}$

$\theta = (13 \text{ voltas}) - 60^\circ$

Note que o arco θ tem extremidade no quarto quadrante:



a) **Correto**
sen θ < 0 (Observe a figura!).
b) **Incorreto**
cos θ > 0 (Observe a figura!).
c) **Incorreto**
tg θ < 0, pois θ tem extremidade no quarto quadrante.
d) **Incorreto**
$\text{sen}\theta + \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} < 0$, pois $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{1}{2}$.
e) **Incorreto**
$\text{sen}\theta + \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \neq 1$

06.13. 01) **Correto**
2 rad $\cong$ 2 · 57° = 114° $\Rightarrow$ 2 rad é a medida de um arco com extremidade no segundo quadrante. Portanto, cos(2) < 0.
02) **Incorreto**
4 rad $\cong$ 4 · 57° = 228° $\Rightarrow$ 4 rad é a medida de um arco com extremidade no terceiro quadrante. Portanto, sen(4) < 0.
04) **Correto**
Arcos de medida igual a 2 rad têm extremidade no segundo quadrante. Então, tg(2) < 0.
08) **Incorreto**
Arcos de medida igual a 4 rad têm extremidade no terceiro quadrante. Então, tg(4) > 0.
16) **Correto**
5 rad $\cong$ 5 · 57° = 285° $\Rightarrow$ cos(5) > 0 e sen(5) < 0, pois arcos de medida igual a 5 rad têm extremidade no quarto quadrante. Portanto, cos(5) > sen(5).

06.14. $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Então,

$\cos 45^\circ - \text{sen}45^\circ + \cos 135^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

06.15. $g(x) = x^2 + x \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\beta)$

Fazendo $\beta = \dfrac{3\pi}{2}$ e $g(x) = 0$, temos:

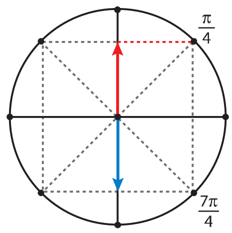
$0 = x^2 + x \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$0 = x^2 + x \cdot 0 + (-1)$

$0 = x^2 - 1$

$x^2 = 1 \Rightarrow$ **x = 1 ou x = -1**

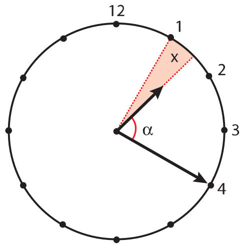
06.16. 01) **Incorreto**
Observe, na figura a seguir, que $\text{sen}\dfrac{\pi}{4} = -\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}$



02) **Incorreto**
1 rad $\cong$ 57° $\Rightarrow$ 1 rad > 50°.

04) **Correto**

Observe a figura a seguir:



Note que o ângulo agudo α, formado pelos ponteiros quando o relógio marca 1h 20min, é tal que $\alpha = 90° - x$, sendo **x** a medida do arco descrito pelo ponteiro menor em um intervalo de tempo de 20 min. Sabendo que esse ponteiro descreve um arco de 30° a cada hora, temos:

$$20\text{min} = \frac{60\text{ min}}{3} = \frac{1\text{h}}{3} \Rightarrow x = \frac{30^\circ}{3} \Rightarrow x = 10^\circ$$

Portanto, $\alpha = 90° - 10° = \mathbf{80°}$

08) **Correto**

$2r = 28\text{ cm} \Rightarrow r = 14\text{ cm}$

$$\alpha = \frac{L}{R}\text{rad} \Rightarrow \alpha = \frac{12\text{ cm}}{14\text{ cm}}\text{rad} = \frac{6}{7}\text{rad} \Rightarrow \alpha < 1\text{rad}$$

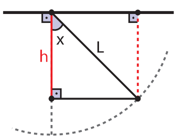
16) **Correto**

Os arcos de $\frac{-13\pi}{4}$ rad e $\frac{3\pi}{4}$rad são côngruos (têm extremidades no mesmo ponto), pois a diferença entre eles é um número inteiro de voltas. De fato:

$$\frac{3\pi}{4}\text{rad} - \left(-\frac{13\pi}{4}\text{rad}\right) = \frac{16\pi}{4}\text{rad} = 4\pi\text{ rad} = 2\text{ voltas}$$

Como $0 < \frac{3\pi}{4}\text{rad} < 2\pi\text{ rad}$, temos que $\frac{3\pi}{4}$rad é a menor determinação positiva de $-\frac{13\pi}{4}$rad

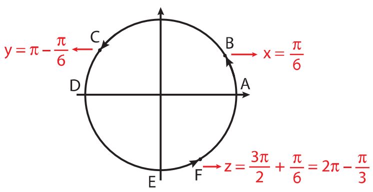
06.17.



Da figura, temos que: $\cos(x) = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L \cdot \cos(x)$

Portanto, sendo **h** uma altura que depende do ângulo **x**, é correto afirmar que $\mathbf{h(x) = L \cdot \cos(x)}$

06.18.



Da figura, temos que:

- $\text{sen}(x) = \text{sen}(y) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\text{sen}(z) = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(y) = -\cos(x) \Rightarrow \cos(x) + \cos(y) = 0$
- $\cos(z) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Se **S** é o resultado da soma pedida, então

$$S = \text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) + \underbrace{\text{cox}(x) + \cos(y)}_{\text{zero}} + \cos(z)$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

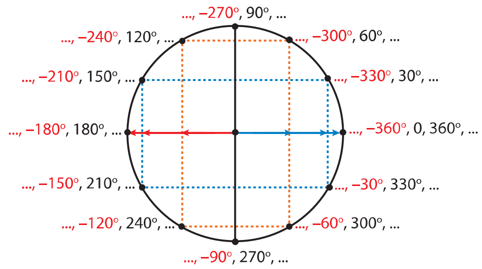
Ou seja:

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) + \text{cox}(x) + \cos(y) + \cos(z) = \mathbf{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

06.19. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right\}$

$$x = \frac{k \cdot \pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k \cdot 180^\circ}{6} \Rightarrow x = k \cdot 30^\circ$$

À medida que o número inteiro **k** vai assumindo os valores {0, ±1, ±2, ±3, ...}, **x** vai assumindo os valores {0, ±30°, ±60°, ±90°, ...}, respectivamente. Os arcos correspondentes a esses valores de **x** têm suas extremidades nos pontos indicados na figura a seguir:



Portanto, a expressão E = cos(x) pode assumir, nesse caso, apenas os valores **0**, $\mathbf{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, **1**, $\mathbf{-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ e **–1**.

06.20. a) B(–1, 2), C($-\sqrt{5}$, 0), D(–1, – 2), E(1, – 2) e F($\sqrt{5}$, 0)

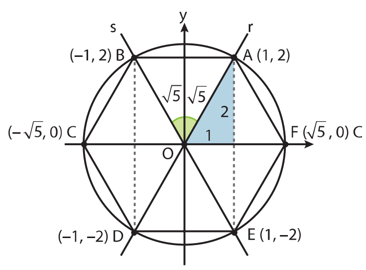
$\text{Área}_{(ABCDEF)} = 4\left(\sqrt{5} + 1\right)$ u. a.

b) cos(AÔB) = 0,6

Resolução:

Da simetria das retas **r** e **s** ficam determinadas as coordenadas dos pontos **B**, **D** e **E**. Do triângulo retângulo destacado na figura a seguir, verifica-se que o raio da circunferência que circunscreve o hexágono (que não é regular) mede $\sqrt{5}$ u.c. Dessa forma, ficam determinadas também as coordenadas dos pontos **C** e **F**.

Observe a figura:



- As coordenadas dos vértices B, C, D, E e F são, respectivamente, **(−1, 2), (−$\sqrt{5}$, 0), (−1, −2), (1, −2)** e **($\sqrt{5}$, 0)**
- Área do hexágono ABCDEF:
  Esse hexágono é composto por 6 triângulos, sendo que
  – os triângulos AOF, BOF, COD e EOF são congruentes e têm, cada um, área igual a $\frac{\sqrt{5} \cdot 2}{2} = \sqrt{5}$ u.a.;
  – os triângulos AOB e DOE são congruentes e têm, cada um, área igual a $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ u.a.

Portanto:

$$\text{Área}_{(ABCDEF)} = 4 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 2$$

$$\mathbf{Área_{(ABCDEF)} = 4(\sqrt{5} + 1)\ u.a.}$$

- Cosseno do ângulo AÔB:
  O ângulo AÔB, destacado na figura anterior, é um ângulo interno do triângulo AOB, isósceles, de lados 2, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$. Pela lei dos cossenos:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(A\hat{O}B)$$

$$2^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(A\hat{O}B)$$

$$4 = 10 - 10\cos(A\hat{O}B)$$

$$10\cos(A\hat{O}B) = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\cos(A\hat{O}B) = 0{,}6}$$