Aula 16

16.01. a

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$x - (3x - 1) = x^2 - 11 - x$

$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -4$

16.02. c

$x = 3 \Rightarrow (8, 3, -2, ...)$

$r = 3 - 8 = -5$

$x = -4 \Rightarrow (-13, -4, 5, ...)$

$r = 5 - (-4) = 9$

Como a progressão aritmética é crescente, a razão é igual a 9.

16.03. b

$r = 6 - 4 = 2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_n = 4 + (n-1) \cdot 2$

$a_n = 2n + 2$

16.04. d

$r = 5 - 2 = 3$

$a_{40} = a_1 + 39 \cdot r$

$a_{40} = 2 + 39 \cdot 3$

$a_{40} = 119$

16.05. c

$a_n = 7n - 20$

$a_1 = 7 \cdot 1 - 20 = -13$

$a_2 = 7 \cdot 2 - 20 = -6$

$r = -6 - (-13)$

$r = 7$

16.06. e

$a_{40} = a_{20} + 20 \cdot r$

$a_{40} = 5 + 20 \cdot 2$

$a_{40} = 45$

16.07. e

Os números que são simultaneamente múltiplos de 3 e de 7 são múltiplos de 21. Os múltiplos de 21 de 1 a 500 formam uma progressão aritmética.

(21, 42, 63, ..., 483)

$a_1 = 21$

$a_n = 483$

$r = 21$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$483 = 21 + (n-1) \cdot 21 \Rightarrow n = 23$

16.08. c

Os múltiplos de 7 entre 50 e 150 formam uma progressão aritmética de razão 7.

(56, 63, 70, ..., 147)

$a_1 = 56$

$a_n = 147$

$r = 7$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$147 = 56 + (n-1) \cdot 7 \Rightarrow n = 14$

16.09. a

Fevereiro: $a_1 = 400$

Março: $a_2 = 400 + r$

Abril: $a_2 = 400 + 2r$

⋮

Novembro: $a_{10} = 400 + 9r$

Assim:

$400 + (400 + r) + (400 + 2r) + ... + (400 + 9r) = 26500$

$400 \cdot 10 + (r + 2r + ... + 9r) = 26500$

$4000 + 45r = 26500$

$45r = 22500 \Rightarrow r = 500$

Portanto, o número de peças produzidas em setembro de 2014 é $a_8 = 400 + 7 \cdot 500 = 3900$.

16.10. a

Seja $d_{AB} = x$. De acordo com o enunciado, temos:

$d_{BC} = x - 10$

$d_{CD} = x - 20$

$d_{AD} = 390$

$x + x - 10 + x - 20 = 390$

$3x = 420 \Rightarrow x = 140$ km

$d_{AD} = 390$

$x + x - 10 + x - 20 = 390$

$3x = 420 \Rightarrow x = 140$ km

(140, 130, 120, ...) PA

$r = 130 - 140 = -10$

$a_{20} = a_1 + 19r$

$a_{20} = 140 + 19 \cdot (-10)$

$a_{20} = -50$

16.11. c

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$x - 2 - (1 - 3x) = 2x + 1 - (x - 2)$

$4x - 3 = x + 3 \Rightarrow x = 2$

16.12. c

$a_1 = 10920$

$a_2 = 12642$

$r = 12642 - 10920 = 1722$

O valor do mercado em 2027, em milhões de dólares, corresponde ao 11.º termo da progressão aritmética.

Assim:

$a_{11} = a_1 + 10 \cdot r$

$a_{11} = 10920 + 10 \cdot 1722$

$a_{11} = 28140$

16.13. b

$r = 15 - 3 = 12$

$a_{36} = a_1 + 35 \cdot r$

$231 = a_1 + 35 \cdot 12 \Rightarrow a_1 = -189$

$a_y = a_1 + (y-1) \cdot r$

$27 = -189 + (y-1) \cdot 12 \Rightarrow y = 19$

Portanto, **y** é um número primo.

16.14. e

Os números das primeiras figurinhas de cada página formam a seguinte progressão aritmética:

$a_1 = 1$

$a_2 = 26$

$a_3 = 51$

$\vdots$

$a_{34} = 826$

$a_{35} = 851$

(1, 26, 51, ..., 826, 851)

Como 851 não é múltiplo de 7 e 826 é múltiplo de 7, a última página que se iniciará com uma figurinha especial é a de número 34.

16.15. d

Os números ímpares e múltiplos de 3 de 1 a 140 são:

(3, 9, 15, ..., 135)

Essa sequência é uma progressão aritmética de razão 6.

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

$135 = 3 + (n-1)\cdot 6 \Rightarrow n = 23$

Como o número **k** de páginas com anúncios não deve ultrapassar 15% do total de páginas da revista, então $k \leq 0{,}15 \cdot 140 = 21$. Portanto, o maior valor possível para **k** é 21.

16.16. d

O último termo de cada progressão aritmética com **n** termos é igual a **k**.

(2, 9, 16, ..., k)

$r = 9 - 2 = 7$

$k = 2 + (n-1)\cdot 7 = 7n - 5$

(382, 370, 358, ..., k)

$r = 370 - 382 = -12$

$k = 382 + (n-1)\cdot(-12) = -12n + 394$

Assim:

$7n - 5 = -12n + 394$

$19n = 399 \Rightarrow n = 21$

$k = 7n - 5$

$k = 7 \cdot 21 - 5 = 142$

16.17. b

Observe que:

$R_2 - R_1 = 4 = 2\cdot 2$

$R_3 - R_2 = 6 = 2\cdot 3$

$R_4 - R_3 = 8 = 2\cdot 4$

$\vdots$

$R_n - R_{n-1} = 100 = 2\cdot 50$

Note que $R_n - R_{n-1} = 2n$. Portanto, se a diferença entre dois números retangulares consecutivos é 100, o maior deles é o R_{50}.

16.18. c

As quantidades de quadradinhos em cada posição formam a seguinte progressão aritmética:

(2, 3, 4, 5, ...)

Assim:

$a_{96} = a_1 + 95\cdot r$

$a_{96} = 2 + 95\cdot 1 = 97$

Quando a figura ocupa uma posição ímpar, os números de quadrado pretos e cinzas são iguais.

Quando a figura ocupa uma posição par, existe um quadrado preto a mais do que o número de quadrados cinzas.

Portanto, na figura da 96ª posição, temos um quadrado preto a mais, ou seja, 49 quadrados pretos e 48 quadrados cinzas.

16.19.

a) Os múltiplos de 13 formam uma progressão de razão 13.

(104, 117, 130, ..., 195)

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

$195 = 104 + (n-1)\cdot 13 \Rightarrow n = 8$

b) Os múltiplos de 13 formam uma progressão de razão 17.

(1003, 1020, 1037, ..., 1989)

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

$1989 = 1003 + (n-1)\cdot 17 \Rightarrow n = 59$

16.20.

Sejam x, $x + 20°$, $x + 40°$ e $x + 60°$ as medidas dos ângulos internos do quadrilátero.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, temos:

$x + x + 20° + x + 40° + x + 60° = 360°$

$4x = 240° \Rightarrow x = 60°$

Portanto, a medida do maior ângulo interno do quadrilátero é $60° + 60° = 120°$.

Aula 17

17.01. a

$$x = \frac{2 + 194}{2} = 98$$

17.02. c

$9 + 201 = x + y$

$x + y = 210$

17.03. c

Sejam $\mathbf{x - r}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x + r}$ os três números em progressão aritmética.

Assim:

$x - r + x + x + r = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$

Portanto, o termo do meio é 7.

17.04. c

$(10, \underbrace{_, _, \cdots, _}_{19 \text{ termos}}, 410)$ PA

$n = 19 + 2 = 21$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

$410 = 10 + (21-1)\cdot r \Rightarrow 20r = 400 \Rightarrow r = 20$

17.05. d

Sejam $\mathbf{x - 2r}$, $\mathbf{x - r}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x + r}$ e $\mathbf{x + 2r}$ os cinco números em progressão aritmética.

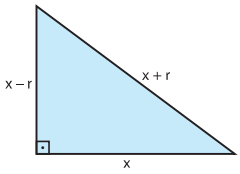
Assim:

$x - 2r + x - r + x + x + r + x + 2r = 90$

$5x = 90 \Rightarrow x = 18$

O termo médio é igual a 18.

17.06. c



$x-r+x+x+r=6 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2\,m$

$(x+r)^2=x^2+(x-r)^2$

$x^2+2xr+r^2=x^2+x^2-2xr+r^2$

$x^2-4xr=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=4r$

Como $x=0$ não faz sentido, então $x=4r$. Para $x=2\,m$, temos:

$2=4r \Rightarrow r=\frac{1}{2}\,m$

Área do triângulo:

$$\text{Área}=\frac{x\cdot(x-r)}{2}=\frac{2\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{3}{2}$$

$\text{Área}=1{,}5\,m^2$

17.07. c

Somando a primeira equação com a segunda, temos:

$2y-2x=12$

$y-x=6$

$r=6$

Portanto, $5<r\leq 7$.

17.08. 31 (01, 02, 04, 08, 16)

Sejam **x**, **x + 20**, **x + 40**, **x + 60**, **x + 80** e **x + 100**, as medidas em graus dos ângulos internos do hexágono.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é $180°\cdot(n-2)$, temos:

$x+x+20+x+40+x+60+x+80+x+100=180\cdot(6-2)$

$6x+300=720$

$6x=420 \Rightarrow x=70$

Assim, os ângulos internos do hexágono medem 70°, 90°, 110°, 130°, 150° e 170°.

01) CORRETO.

02) CORRETO.

Um dos ângulos internos mede 90° (ângulo reto).

04) CORRETO.

O menor ângulo externo mede $180°-170°=10°$.

08) CORRETO.

O maior ângulo externo mede $180°-70°=110°$

16) CORRETO.

17.09. b

$a_{21}+a_{20}=a_{41}$

$a_1+20r+a_1+19r=a_1+40r$

$a_1=r$

Portanto:

$a_1=r=9$

$a_{21}=a_1+20\cdot r$

$a_{21}=9+20\cdot 9=189$

17.10. a

Sejam **x − 2r**, **x − r**, **x**, **x + r** e **x + 2r** os cinco termos primeiros termos da PA.

Assim:

$x-2r+x-r+x+x+r+x+2r=15$

$5x=15 \Rightarrow x=3$

$(x-2r)\cdot(x-r)\cdot x\cdot(x+r)\cdot(x+2r)=0$

$(3-2r)\cdot(3-r)\cdot 3\cdot(3+r)\cdot(3+2r)=0$

$3-2r=0$ ou $3-r=0$ ou $3+r=0$ ou $3+2r=0$

$r=\frac{3}{2}$ ou $r=3$ ou $r=-3$ ou $r=-\frac{3}{2}$

Como a razão da PA é um número inteiro positivo, então $r=3$.

Portanto:

$a_2=x-r=3-3=0$

17.11. c

Áreas dos três terrenos:

$A_1=(x-4)^2$

$A_2=x^2$

$A_3=(x+3)^2$

Assim:

$A_2-A_1=A_3-A_2$

$x^2-(x-4)^2=(x+3)^2-x^2$

$x^2-(x^2-8x+16)=x^2+6x+9-x^2$

$8x-16=6x+9 \Rightarrow x=\frac{25}{2}$

As medidas dos lados dos terrenos são $\frac{25}{2}-4=\frac{17}{2}$ metros, $\frac{25}{2}$ metros e $\frac{25}{2}+3=\frac{31}{2}$ metros. A soma dos perímetros dos três terrenos, em metros, é:

$4\cdot\frac{17}{2}+4\cdot\frac{25}{2}+4\cdot\frac{31}{2}=34+50+62=146$

17.12. e

Sejam **x − r**, **x** e **x + r**, as idades das três irmãs, em anos.

Assim:

$x-r+x+x+r=222 \Rightarrow 3x=222 \Rightarrow x=74$

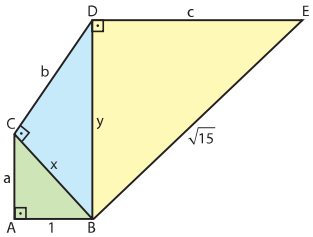
Como a irmã mais jovem tem 70 anos, temos:

$x-r=70$

$74-r=70 \Rightarrow r=4$

Portanto, a irmã mais velha tem $x+r=74+4=78$ anos.

17.13. c



Como **a**, **b** e **c** formam uma progressão aritmética de razão 1, então $b=a+1$ e $c=a+2$.

Nos triângulos retângulos ABC, BCD e BDE, temos:

- $x^2=a^2+1$
- $y^2=b^2+x^2 \Rightarrow y^2=(a+1)^2+x^2$
- $\sqrt{15}^2=c^2+y^2 \Rightarrow 15=(a+2)^2+y^2$

Assim:

$y^2=(a+1)^2+x^2$

$y^2=(a+1)^2+a^2+1$

$y^2=2a^2+2a+2$

$15=(a+2)^2+y^2$

$15=(a+2)^2+2a^2+2a+2$

$3a^2+6a-9=0$

$a^2+2a-3=0\Rightarrow a=1$ ou $a=-3$ (não convém)

Portanto, $a=1$.

17.14. d

$a_{20}=2014$

$r=4$

$a_{35}=a_{20}+15\cdot r$

$a_{35}=2014+15\cdot 4$

$a_{35}=2074$

17.15. d

$f(1)=2$

$f(1+1)=\dfrac{2\cdot f(1)+1}{2}=\dfrac{2\cdot 2+1}{2}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow f(2)=\dfrac{5}{2}$

$f(2+1)=\dfrac{2\cdot f(2)+1}{2}=\dfrac{2\cdot\frac{5}{2}+1}{2}=\dfrac{6}{2}\Rightarrow f(3)=3$

$f(3+1)=\dfrac{2\cdot f(3)+1}{2}=\dfrac{2\cdot 3+1}{2}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow f(4)=\dfrac{7}{2}$

$\vdots$

A sequência $\left(f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots\right)=\left(2, \dfrac{5}{2}, 3, \dfrac{7}{2}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$.

Assim:

$f(101)=f(1)+100\cdot r$

$f(101)=2+100\cdot\dfrac{1}{2}$

$f(101)=52$

17.16. a

De acordo com os sentidos das setas, o número da casa em que se encontra o ponto de interrogação é o 57º termo da seguinte progressão aritmética:

(3, 6, 9, ...)

Assim:

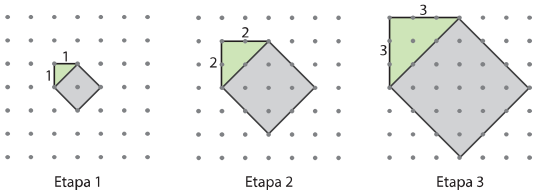
$r=3$

$a_{57}=a_1+56\cdot r$

$a_{57}=3+56\cdot 3$

$a_{57}=171$

17.17. d



Nos triângulos retângulos de cada figura, temos:

$(L_1)^2=1^2+1^2\Rightarrow(L_1)^2=2\Rightarrow L_1=\sqrt{2}$ cm

$(L_2)^2=2^2+2^2\Rightarrow(L_2)^2=8\Rightarrow L_2=2\sqrt{2}$ cm

$(L_3)^2=3^2+3^2\Rightarrow(L_3)^2=18\Rightarrow L_3=3\sqrt{2}$ cm

As medidas dos lados dos quadrados formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt{2}$ cm. Assim:

$L_{20}=L_1+19\cdot r$

$L_{20}=\sqrt{2}+19\cdot\sqrt{2}=20\sqrt{2}$ cm

Área do quadrado da vigésima figura:

Área $=(20\sqrt{2})^2=400\cdot 2=800$ cm^2

17.18. b

Sejam **x – r**, **x** e **x + r** os três termos consecutivos em progressão aritmética crescente (a razão é positiva).

Assim:

- $S_1=x-r+x+x+r=3x$
- $S_2=(x-r)^2+x^2+(x+r)^2$

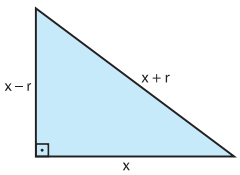
$S_2=x^2-2xr+r^2+x^2+x^2+2xr+r^2=3x^2+2r^2$

As raízes da equação $x^2-S_1\cdot x+\left(S_2-\dfrac{1}{2}\right)=0$ são **x** e **x + r**. Usando as relações de soma e produto das raízes, temos:

- $x+x+r=S_1\Rightarrow 2x+r=3x\Rightarrow x=r$
- $x\cdot(x+r)=S_2-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x^2+xr=3x^2+2r^2-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow r^2+r\cdot r=3r^2+2r^2-\dfrac{1}{2}\Rightarrow 3r^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow r^2=\dfrac{1}{6}\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

17.19.



$(x+r)^2=x^2+(x-r)^2$

$x^2+2xr+r^2=x^2+x^2-2xr+r^2$

$x^2-4xr=0\Rightarrow x=0$ ou $x=4r$

Como $x=0$ não faz sentido, então $x=4r$. Assim, as medidas dos lados do triângulo são:

- $x-r=4r-r=3r$
- $x=4r$
- $x+r=4r+r=5r$

A área do triângulo é 150.

$150=\dfrac{4r\cdot 3r}{2}$

$12r^2=300\Rightarrow r^2=25\Rightarrow r=5$

Portanto, os lados do triângulo medem 15, 20 e 25.

17.20.

a) Como (2/5, 4/9, 1/2, ...) é uma progressão harmônica, a sequência (5/2, 9/4, 2, ...) é uma progressão aritmética. Assim:

(5/2, 9/4, 2, ...)

$r = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

$a_6 = a_1 + 5 \cdot r$

$a_6 = \frac{5}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$

Portanto, o sexto termo da progressão harmônica é $\frac{4}{5}$.

b) Se **a**, **b** e **c** são termos consecutivos de uma progressão harmônica, então $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Portanto:

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$

$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$

$\frac{2}{b} = \frac{a+c}{a \cdot c} \Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$

Aula 18

18.01. d

$r = 3 - 1 = 2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$39 = 1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow n = 20$

$x = S_{20}$

$x = \left(\frac{1+39}{2}\right) \cdot 20 = 400$

18.02. d

$r = 4 - 2 = 2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$40 = 2 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow n = 20$

$y = S_{20}$

$y = \left(\frac{2+40}{2}\right) \cdot 20 = 420$

18.03. b

$S_n = 3n^2$

$S_{10} = 3 \cdot 10^2 = 300$

18.04. c

$a_1 = S_1$

$a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$

18.05. a

$S_n = 3n^2$

$S_1 = 3 \cdot 1^2 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$

$S_2 = 3 \cdot 2^2 = 12 \Rightarrow a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow 3 + a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 9$

$r = a_2 - a_1$

$r = 9 - 3 = 6$

18.06. a

$S_{13} = 78$

$\left(\frac{a_1 + a_{13}}{2}\right) \cdot 13 = 78 \Rightarrow a_1 + a_{13} = 12$

Portanto:

$a_7 = \frac{a_1 + a_{13}}{2} = \frac{12}{2} = 6$

18.07. b

$x + 7 - (2x - 1) = 12$

$-x + 8 = 12 \Rightarrow x = -4$

$a_1 = 2x - 1 = 2 \cdot (-4) - 1 = -9$

$a_8 = a_1 + 7 \cdot r = -9 + 7 \cdot 12 = 75$

$S_8 = \left(\frac{a_1 + a_8}{2}\right) \cdot 8 = (-9 + 75) \cdot 4 = 264$

18.08. 25

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 3$

$\vdots$

$a_n = n$

$S_n = 325$

$\left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n = 325 \Rightarrow n^2 + n - 650 = 0 \Rightarrow n = 25 \text{ ou } n = -26$

Como $n = -26$ não faz sentido, o número de filas é $n = 25$.

18.09. 90

$S_{10} = \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2}\right) \cdot 10$

$S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$

Como $a_1 + a_{10} = a_3 + a_8 = 18$, temos:

$S_{10} = 18 \cdot 5 = 90$

18.10. b

Seja **x** a distância em metros percorrida no primeiro dia.

Assim:

$a_1 = x$

$r = 100$

$a_{21} = 6000$

$a_1 + 20 \cdot r = 6000$

$x + 20 \cdot 100 = 6000 \Rightarrow x = 4000$

Portanto, a distância total percorrida nos 21 dias é:

$S_{21} = \left(\frac{a_1 + a_{21}}{2}\right) \cdot 21$

$S_{21} = \left(\frac{4000 + 6000}{2}\right) \cdot 21 = 105000 \text{ m}$

18.11. c

$(2, 5, 8, ..., a_{24})$ PA

$r = 3$

$a_{24} = a_1 + 23 \cdot r$

$a_{24} = 2 + 23 \cdot 3 = 71$

$$S_{24} = \left(\frac{a_1 + a_{24}}{2}\right) \cdot 24$$

$S_{24} = (2 + 71) \cdot 12 = 876$

Portanto, a soma dos comprimentos de todos os segmentos que formam essa figura é 876 mm = 87,6 cm.

18.12. c

$a_1 = 500$

$a_{400} = a_1 + 399 \cdot r = 500 + 399r$

$S_{400} = 1000000$

$$\left(\frac{a_1 + a_{400}}{2}\right) \cdot 400 = 1000000$$

$(500 + 500 + 399r) \cdot 200 = 1000000$

$$1000 + 399r = 5000 \Rightarrow r = \frac{4000}{399}$$

Portanto:

$$a_{400} = 500 + 399 \cdot \frac{4000}{399} = 4500$$

O valor que Mila precisará poupar no 400º mês para que sua meta seja atingida é R$ 4.500,00.

18.13. e

$(51, 61, 71, \ldots, 341)$ PA

$r = 10$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$341 = 51 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow n = 30$

$$S_{30} = \left(\frac{a_1 + a_{30}}{2}\right) \cdot 30$$

$S_{30} = (51 + 341) \cdot 15 = 5880$

18.14. e

$S_n = 8n^2 - 1$

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_9 + a_{10}$

$S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8 + a_9$

Assim:

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$S_{10} = 8 \cdot 10^2 - 1 = 799$

$S_9 = 8 \cdot 9^2 - 1 = 647$

$a_{10} = 799 - 647 = 152$

18.15. 20 (04, 16)

01) INCORRETO.

$a_n = 2n - 5$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

$a_{11} = 2 \cdot 11 - 5 = 17$

$$S_{11} = \left(\frac{a_1 + a_{11}}{2}\right) \cdot 11 = \left(\frac{-3 + 17}{2}\right) \cdot 11 = 77$$

02) INCORRETO.

Todos os termos da sequência são ímpares.

$\underbrace{a_n}_{\text{ímpar}} = \underbrace{2n}_{\text{par}} - \underbrace{5}_{\text{ímpar}}$

04) CORRETO.

A sequência é uma progressão aritmética de razão 2.

$(-3, -1, 1, 3, 5, \ldots)$

08) INCORRETO.

Observe que para $n = 4$ tem-se $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$.

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -3 - 1 + 1 + 3 = 0$

16) CORRETO.

$a_1 = -3$

18.16. a

Seja p_n o número pentagonal de ordem **n**.

Assim:

$p_1 = 1$

$p_2 = 5 = 1 + 4$

$p_3 = 12 = 1 + 4 + 7$

$p_4 = 22 = 1 + 4 + 7 + 10$

⋮

Note que o número pentagonal de ordem **n** é a soma dos **n** termos de uma progressão aritmética de razão 3.

$p_{55} = 1 + 4 + 7 + ... + a_{55}$

$a_{55} = a_1 + 54 \cdot r$

$a_{55} = 1 + 54 \cdot 3 = 163$

$$p_{55} = \left(\frac{1 + 163}{2}\right) \cdot 55 = 4510$$

18.17. c

$S_{100} = 100$

$$\left(\frac{a_1 + a_{100}}{2}\right) \cdot 100 = 100 \Rightarrow a_1 + a_{100} = 2$$

$S_{200} = 100 + 200$

$$\left(\frac{a_1 + a_{200}}{2}\right) \cdot 200 = 300 \Rightarrow a_1 + a_{200} = 3$$

$$\begin{cases} a_1 + a_{100} = 2 \\ a_1 + a_{200} = 3 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos:

$a_{200} - a_{100} = 1$

$$100 \cdot r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

Portanto, a diferença entre o segundo e o primeiro termos é igual a $r = 10^{-2}$.

18.18. d

$$g(x) = 3x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g(2) = 3 \cdot 2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) = 6 + 0$$

$$g(3) = 3 \cdot 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) = 9 - 1$$

$$g(4) = 3 \cdot 4 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 4\right) = 12 + 0$$

$$g(5) = 3 \cdot 5 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 5\right) = 15 + 1$$

⋮

$$g(10) = 3 \cdot 10 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10\right) = 30 + 0$$

$$g(11) = 3 \cdot 11 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 11\right) = 33 - 1$$

Assim:

$$g(2)+g(3)+...+g(10)+g(11)=\underbrace{(6+9+12+...+30+33)}_{\text{soma dos 10 termos de uma PA}}-1$$

$$g(2)+g(3)+...+g(10)+g(11)=\left(\frac{6+33}{2}\right)\cdot 10-1$$

$$g(2)+g(3)+...+g(10)+g(11)=194$$

18.19.

a)

2006: $40-r$

2007: 40

2008: $40+r$

2009: $40+2r$

2010: $40+3r$

Média = 30

$$\frac{40-r+40+40+r+40+2r+40+3r}{5}=30$$

$$200+5r=150\Rightarrow r=-10$$

b) Em 2010 foram cometidos $40+3\cdot(-10)=10$ crimes. Interpretando "duas vezes mais" como sendo "o dobro de", seja **x** o número de estelionatos. Assim:

$\frac{x}{2}$ assassinatos

x roubos

x estelionatos

$$\frac{x}{2}+x+x=10\Rightarrow x=4$$

Em 2010 ocorreram 4 estelionatos.

c) O número médio de crimes ocorridos de 2007 a 2011 é:

2007: 40

2008: 30

2009: 20

2010: 10

2011: 30

$$\text{Média}=\frac{40+30+20+10+30}{5}=\frac{130}{5}=26$$

18.20.

Considere uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, de razão **r** e outra sequência $(b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1})$, tal que b_k é a média aritmética de a_k e a_{k+1}, ou seja, $b_k=\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$.

Assim:

$$b_k-b_{k-1}=\frac{a_k+a_{k+1}}{2}-\frac{a_{k-1}+a_k}{2}=\frac{a_{k+1}-a_{k-1}}{2}=\frac{2r}{2}=r$$

A sequência $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ também é uma progressão aritmética de razão **r**.

Além disso, as somas dos extremos das duas progressões aritméticas são iguais.

$$b_1+b_{n-1}=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}=\frac{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})}{2}$$

$$b_1+b_{n-1}=\frac{2\cdot(a_1+a_n)}{2}=a_1+a_n$$

Seja S_n a soma dos termos da camada formada por **k** tijolos.

Portanto:

$$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n$$

$$S_1=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot 1$$

$$S_2=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot 2$$

$$S_3=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot 3$$

$$\vdots$$

$$S_{100}=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot 100$$

$$S_1+S_2+S_3+...+S_{100}=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot(1+2+3+...+100)$$

$$S_1+S_2+S_3+...+S_{100}=\left(\frac{10+490}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+100}{2}\right)\cdot 100=1262500$$

Aula 16

16.01. a

O número de resultados é igual ao número de permutações simples de 8 elementos, ou seja, $P_8 = 8!$.

16.02. c

O número de modos é igual a $P_3 = 3! = 6$.

16.03. e

Se Carlos é o primeiro e Bruno é o último da fila, então os outros três podem variar de $P_3 = 3! = 6$ modos possíveis.

16.04. e

Se **K** representa cara e **R** representa coroa, o número de sequências possíveis é igual ao número de anagramas de **KKRRRR**, ou seja:

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 15$$

16.05. d

Fixando a letra **U** no início e **R** no final, a sequência das letras intermediárias **D**, **D**, **O**, **O** e **A**, pode ser alterada. O número de anagramas é, portanto, o número de permutações de 5 letras, com 2 repetições da letra **D** e 2 repetições da letra **O**, ou seja:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30$$

16.06. b

A quantidade de siglas distintas, de 5 letras, contendo **B**, **L**, **E**, **R** e **R**, é $P_5^2 = 60$.

16.07. e

Existem 6 modos de escolher a letra que inicia o anagrama, já que esta letra deve ser diferente da letra **O**. Escolhida a letra que inicia o anagrama, existem 5 opções de escolha da letra que termina o anagrama. Existem $P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 360$ modos de ordenar as 6 letras intermediárias, com 2 repetições da letra **O**. Logo, a quantidade de anagramas é igual a $6 \cdot 5 \cdot 360 = 10800$.

16.08. c

O número de senhas é igual ao número de permutações de 10 elementos, com 4 repetições do elemento "a", 2 repetições do elemento "b" e 4 repetições do elemento "7", ou seja:

$$P_{10}^{4,2,4} = \frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 3150$$

16.09. a

Para escolher a ordem das 4 mulheres juntas, existem 4! maneiras. Considerando o grupo das 4 mulheres como sendo um único elemento, temos 7 elementos no total, que podem ser ordenados de 7! maneiras. Logo, a quantidade de modos com que podem se posicionar os 10 clientes, de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas, é igual a $4! \cdot 7!$

16.10. a

A disposição das pessoas do grupo deve intercalar rapazes e garotas. Como existem mais garotas que rapazes, a disposição das pessoas deve, necessariamente, começar com uma garota. O número de modos distintos que esse grupo poderia ocupar esses sete lugares é, portanto, igual a:

$P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$

16.11. b

I. O número de maneiras de as 10 pessoas se acomodarem nas 10 poltronas é $P_{10} = 10!$

II. O número de maneiras de as 10 pessoas se acomodarem nas 10 poltronas, ficando juntos os dois que brigaram, é $P_9 \cdot P_2 = 9! \cdot 2!$

O número de maneiras de essas 10 pessoas se acomodarem, com os elementos do casal separados, é dado por

$P_{10} - P_9 \cdot P_2 = 10! - 9! \cdot 2! = 10 \cdot 9! - 9! \cdot 2! = 9! \cdot (10 - 2) = 8 \cdot (9!)$

16.12. e

Se **C** representa uma consoante e **V** uma vogal, então o anagrama deve ter a forma **CVCVC**. Para variar o anagrama, podemos permutar as vogais entre si e as consoantes entre si. Logo, a quantidade de anagramas que não possuem vogais nem consoantes juntas é igual a:

$P_2 \cdot P_3 = 2! \cdot 3! = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = 12$

16.13. a

Para ordenar as 4 músicas de MPB, existem 4! modos. Para ordenar as 3 de Rock, existem 3! modos. Para ordenar as 3 de Pop, existem 3! modos. Para ordenar os 3 gêneros musicais, existem 3! modos. Logo, o número de programas distintos em que as músicas vão ser tocadas, agrupadas por estilo, é dado por $4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!$.

16.14. c

Existem $P_4 = 4! = 24$ números que começam pelo algarismo 1.
Existem $P_4 = 4! = 24$ números que começam pelo algarismo 3.
Existem $P_4 = 4! = 24$ números que começam pelo algarismo 5.
Existem $P_3 = 3! = 6$ números que começam pelos algarismos 71.
Existem $P_3 = 3! = 6$ números que começam pelos algarismos 73.
Existem $P_2 = 2! = 2$ números que começam pelos algarismos 751: 75139 e 75193.
Até o número 75193, existem $24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 = 86$ números.
Em seguida, em ordem crescente, temos 75319 (87.º) e 75391 (88.º).

16.15. b

Começando com a letra **E**, existem 4! = 24 anagramas. Começando com a letra **O**, existem 4! = 24 anagramas. Começando com a letra **R**, existem 4! = 24 anagramas. Começando pelas letras **SE**, existem 6 anagramas. Começando pelas duas letras **SO**, existem 6 anagramas.
Observe que:
$24 + 24 + 24 + 6 + 6 = 84$ anagramas
Logo, **SREOT** é o 85.º anagrama e **SRETO** é o 86.º anagrama, de modo que a última letra do 86.º anagrama é **O**.

16.16. d

Considerando que uma quadra percorrida para a direita é representada por **L** e uma quadra percorrida para cima, por **N**, a quantidade de caminhos de **A** até **B** é igual à quantidade de permutações de 12 letras, com 5 repetições da letra **N** e 7 repetições da letra **L**:

$$P_{12}^{5,7} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 792$$

16.17. d

Para o produto de 7 algarismos ser 14, eles devem ser:
7, 2, 1, 1, 1, 1, 1.
Permutando esses 7 elementos (note que o 1 aparece cinco vezes), temos:

$$P_7^5 = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 42$$

16.18. d

Existem $P_6 = 6! = 720$ modos de ordenarmos os 6 quadros. Existem $P_3 = 3! = 6$ modos de ordenarmos os três quadros de *Gotuzo*. Desses 6 modos, em um único a ordem é cronológica, ou seja, um sexto das sequências possíveis apresentam os três quadros de *Gotuzo* em ordem cronológica. Dessa forma, o número de diferentes maneiras que os seis quadros podem ser expostos é igual a:

$$\frac{P_6}{P_3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

16.19. a) Analisando as opções, quanto à quantidade de letras em cada palavra, temos:
- 1 letra: 5 palavras (as cinco letras)
- 2 letras: $5 \cdot 4 = 20$ palavras
- 3 letras: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ palavras
- 4 letras: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ palavras
- 5 letras: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ palavras

Dessa forma, temos: $5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$ palavras.

b) De acordo com o cálculo anterior, há 325 palavras com uma, duas, três, quatro ou cinco letras, todas distintas. Um quinto dessas 325 palavras começam com uma determinada letra, ou seja, 65 palavras começam, respectivamente, com, **I**, **B**, **M**, **E** ou **C**. Logo, $3 \cdot 65 = 195$ palavras começam pelas letras, **B**, **C** e **E**, e, portanto, na ordem alfabética, aparecem antes da palavra **IBMEC**.

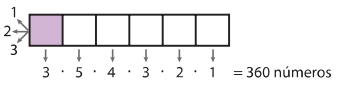
Agora, vamos analisar as palavras que começam com a letra **I** e têm duas, três, quatro ou cinco letras. Com uma única letra contabilizamos apenas uma palavra: **I**. Com duas letras, temos também apenas uma: **IB**. Com três letras, são três as palavras possíveis: **IBC**, **IBE** e **IBM**. Quanto às palavras com quatro letras, podemos separar a contagem em dois casos: começando com **IB** e sendo a terceira letra diferente de **M**, ou com **IBM**. Se começar por **IB** e não continuar com a letra **M**, existem 2 opções para a terceira letra (**C** ou **E**) e, em seguida, 2 opções para a letra restante, ou seja, são $2 \cdot 2 = 4$ palavras. Se começar por **IBM**, existem 2 opções para a última letra (**C** ou **E**). Para as palavras com 5 letras que começam por **IB**, cuja terceira letra não é **M**, há 2 opções para escolher a terceira letra (**C** ou **E**) e, em seguida, 2 opções para escolher a quarta letra e uma única para escolher a quinta letra, num total de $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ palavras. Caso a palavra com 5 letras comece com **IBM**, necessariamente, existem duas palavras: **IBMCE** ou **IBMEC**, num total de 2 palavras. Logo, a quantidade total de palavras até, inclusive, a própria **IBMEC**, é igual a:

$195 + 1 + 1 + 3 + 4 + 2 + 4 + 2 = 212$

Dessa forma, colocando todas as palavras consideradas em ordem alfabética, a palavra **IBMEC** ocupa a 212ª posição.

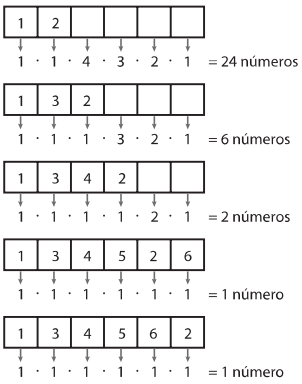
16.20 **1.** A quantidade total de números é igual a $P_6 = 6! = 720$.

2. Vamos, incialmente, calcular a quantidade de números que iniciam pelos algarismos 1, 2 ou 3:



Logo, o primeiro número que começa com o algarismo 4 ocupa a 361ª posição.

3. O primeiro número que termina com o algarismo 2 é 134562. Analisando cada uma das ordens em que o algarismo 2 pode se situar, temos:



Observe que $24 + 6 + 2 + 1 + 1 = 34$.

Portanto, 34ª é a posição do primeiro número que termina com o algarismo 2.

Aula 17

17.01. a

Como são 4 sabores e a casquinha tem 2 sabores distintos, a quantidade de modos de montar a casquinha é igual a $C_{4,2} = 6$.

17.02. e

O número de escolhas é igual ao número de combinações simples de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $C_{5,3} = 10$.

17.03. a

Um jogo qualquer é uma combinação dos 30 inscritos, tomados 2 a 2. Logo, a quantidade total de jogos é igual a $C_{30,2} = 435$.

17.04. b

Para a escolha das duas cores, existem $C_{5,2} = 10$ modos. Excluindo-se o modo único de as cores vermelho e azul serem escolhidas, existem $10 - 1 = 9$ modos possíveis.

17.05. b

O total de jogos é igual a $C_{15,6} = 5005$.

17.06. e

Para escolha das duas entradas, existem $C_{8,2} = 28$ opções.
Para escolha do prato principal, existem $C_{10,1} = 10$ opções.
Para escolha da sobremesa, existem $C_{5,1} = 5$ opções.
Logo, o número de modos de o cliente compor o respectivo almoço é igual a:

$28 \cdot 10 \cdot 5 = 1400$

17.07. c

Para a escolha da pizza de um único sabor, existem $C_{10,1} = 10$ modos.
Para a escolha da pizza de dois sabores, existem $C_{10,2} = 45$ modos.
Logo, para a escolha de uma pizza com um ou dois sabores, existem $10 + 45 = 55$ modos.

17.08. c

Para a escolha das 4 dançantes entre as 9, existem $C_{9,4} = 126$ modos.
Para a escolha das 2 românticas entre as 4, existem $C_{4,2} = 6$ modos.
Logo, são $126 \cdot 6 = 756$ repertórios possíveis para a apresentação, sem considerar a ordem das músicas.

17.09. e

Número de comissões possíveis: $C_{8,5} = 56$.
Número de comissões exclusivamente formadas por gerentes: $C_{5,5} = 1$.
Número de comissões com no mínimo um diretor:
$C_{8,5} - C_{5,5} = 56 - 1 = 55$.

17.10. b

O número de formas de o estádio ser aberto ao público, ficando com pelo menos dois portões abertos, é igual a:

$C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$

17.11. c

O número de grupos de 3 alunos que podem ser formados, a partir de 25 alunos, é igual a $C_{25,3} = 2300$. O número de grupos de 3 alunos que podem ser formados, a partir de 21 alunos (nenhum gênio entre eles), é igual a $C_{21,3} = 1330$. O número de grupos de 3 alunos que podem ser formados, a partir de 25 alunos, de modo que pelo menos um deles seja gênio, é igual a $C_{25,3} - C_{21,3} = 2300 - 1330 = 970$.

17.12. a

Número de grupos nos quais marido e mulher estão presentes: $C_{8,2} = 28$.

Número de grupos nos quais marido e mulher estão ausentes: $C_{8,4} = 70$.

Número de maneiras que o grupo poderá ser formado: $C_{8,2} + C_{8,4} = 28 + 70 = 98$.

17.13. b

Para a escolha de uma bola da casquinha, existem $C_{6,1} = 6$ modos.

Para a escolha de duas bolas da casquinha, existem $C_{6,2} = 15$ modos.

Para a escolha de três bolas da casquinha, existem $C_{6,3} = 20$ modos.

Dessa forma, existem $6 + 15 + 20 = 41$ modos de a Magali pedir a casquinha.

17.14. a

Se Andreia estiver presente, a comissão pode ser formada de $C_{6,4} = 15$ modos.

Se Andreia estiver ausente, a comissão pode ser formada de $C_{8,5} = 56$ modos.

Logo, existem $15 + 56 = 71$ modos de a comissão ser formada, com a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros.

17.15. d

Para construir um triângulo com os 16 pontos dados, existem duas possibilidades quanto à escolha dos 3 vértices do triângulo: Escolher 2 vértices entre os 10 pontos de **r** e 1 vértice entre os 6 pontos de **s**, ou escolher 1 vértice ente os 10 pontos de **r** e 2 vértices entre os 6 pontos de **s**. Dessa forma, tem-se:

$C_{10,2} \cdot C_{6,1} + C_{10,1} \cdot C_{6,2} = 45 \cdot 6 + 10 \cdot 15 = 270 + 150 = 420$

Outra forma:

$C_{16,3} - C_{10,3} - C_{6,3} = 560 - 120 - 20 = 420$

17.16. d

Para escolher as 3 pessoas de um grupo, existem $C_{12,3} = 220$ modos.

Para escolher as 4 pessoas de um grupo, já tendo escolhido o grupo das 3 pessoas, existem $C_{9,4} = 126$ modos.

Para escolher as 5 pessoas, já tendo escolhido o grupo de 3 pessoas e o de 4 pessoas, existe $C_{5,5} = 1$ modo.

Assim, temos:

$C_{12,3} \cdot C_{9,4} \cdot C_{5,5} = 220 \cdot 126 \cdot 1 = 27720$

A resposta independe de qual grupo será inicialmente escolhido.

17.17. d

Número de comissões com José e Amanda: $C_{8,2} = 28$

Número de comissões com José, Amanda, Márcia e Sandro: $C_{4,4} = 1$

Número de comissões sem José e sem Amanda: $C_{8,4} = 70$

Número de comissões sem José, sem Amanda, mas com Márcia e Sandro: $C_{6,2} = 15$

Logo, $(28 - 1) + (70 - 15) = 27 + 55 = 82$ é o número de comissões que podem ser formadas.

17.18. c

Escolhendo um sabor de sorvete e dois sabores de cobertura, temos:

$C_{x,1} \cdot C_{y,2} = 150$ (I).

Escolhendo um sabor de sorvete e três sabores de cobertura, temos:

$C_{x,1} \cdot C_{y,3} = 200$ (II).

Fazendo (II) : (I), tem-se:

$$\frac{C_x^1 \cdot C_y^3}{C_x^1 \cdot C_y^2} = \frac{200}{150} = \frac{4}{3}$$

$$3 \cdot x \cdot \frac{y \cdot (y-1) \cdot (y-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot x \cdot \frac{y \cdot (y-1)}{2 \cdot 1}$$

Como $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $y \neq 1$, tem-se:

$y - 2 = 4$

$y = 6$

Logo, o número de sabores de cobertura disponível é igual a 6.

17.19. a) Existem $C_8^3 = 56$ possibilidades para a escolha das três garotas que podem ficar no **primeiro quarto triplo**.

Após a escolha das três primeiras garotas, existem $C_{(8-3)}^3 = C_5^3 = 10$ possibilidades para a escolha das três garotas que podem ficar no **segundo quarto triplo**.

Agora, resta $C_{(8-3-3)}^2 = C_2^2 = 1$ possibilidade para a escolha das duas garotas que podem ficar no **quarto duplo**.

Portanto, as oito garotas podem alojar-se, nesse hotel, de:

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$ modos diferentes.

b) Qualquer um dos trajetos possíveis, dentre os permitidos, deve ser percorrido caminhando-se 10 quadras, sendo 6 delas para o Leste e 4 para o Norte. Logo, cada caminho pode ser representado por uma permutação da sequência NNNNLLLLLL, onde **N** indica uma quadra caminhada para o Norte, e **L**, para o Leste.

Assim, o número total de trajetos diferentes, do hotel ao restaurante, é igual ao número de permutações de 10 elementos, com 4 repetições de um deles e 6 repetições do outro, ou seja:

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$$

Portanto, existem 210 caminhos diferentes.

17.20. Existem exatamente 10 números que são primos, positivos e menores do que 30. São eles: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Supondo que os números, citados no enunciado, tenham *somente quatro fatores primos* e que os quatro sejam distintos, a quantidade desses números, que é dada por C_{10}^4, é igual a 210.

18.01. d

Para a escolha do algarismo das centenas, existem 7 possibilidades. Escolhido o algarismo das centenas, para o algarismo das dezenas existem 6 possibilidades. Escolhidos os algarismos das centenas e das dezenas, para o algarismo das unidades existem 5 possibilidades.

Considerando os os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podem ser formados $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ números.

18.02. b

Para cadastrar o primeiro algarismo, existem 10 modos. Para cadastrar o segundo algarismo, existem 9 modos. Para cadastrar o terceiro algarismo, existem 8 modos. Logo, a quantidade total de senhas que podem ser cadastradas é igual a $10 \cdot 9 \cdot 8$. Ou seja, A_{10}^{3}.

18.03. e

O número total de modos é igual a $A_{20}^{3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

18.04. a

Para a escolha dos 15 homens do júri, dentre os 30 disponíveis, existem $C_{30,15}$ modos. Para a escolha das 6 mulheres do júri, dentre as 20 disponíveis, existem $C_{20,6}$ modos. Logo, o número de possibilidades de formar o júri popular é igual a $C_{30}^{15} \cdot C_{20}^{6}$.

18.05. a

Para a escolha das 2 questões que devem ter gabarito **E**, dentre as 8 questões da prova, existem $C_{8,2} = 28$ modos.

18.06. a

Para a escolha do primeiro algarismo há 5 modos. Para a escolha do segundo algarismo há 4 modos. Para a escolha do terceiro algarismo há 3 modos. Assim, a quantidade de números de 3 algarismos distintos é igual a $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

18.07. d

O número de modos é igual a $A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

18.08. a

Como os objetos são diferentes, temos que escolher e ordenar 5 caixas dentre as 7 disponíveis. Isso pode ser feito de $A_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ modos.

18.09. a

Existem $C_{7,3} = 35$ modos possíveis de se escolher 3 sintomas entre os 7 possíveis. Como quaisquer dois dos pacientes não apresentavam os mesmos três sintomas, conclui-se que o número máximo de pacientes é igual a 35.

18.10. b

A escolha de 2 engenheiros entre 6 disponíveis pode ser feita de $C_{6,2} = 15$ modos. Se ainda é preciso destacar o engenheiro chefe e o engenheiro assistente, então existem $2 \cdot 15 = 30$ modos. A escolha dos 3 técnicos, entre 12 disponíveis, pode ser feita de $C_{12,3} = 220$ modos. Logo, para todas as escolhas, existem $30 \cdot 220 = 6600$ modos possíveis.

18.11. c

Como são 8 lugares para 5 pessoas, o número de modos é igual a:

$A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

18.12. a

Os algarismos das placas podem ser distintos ou não. O mesmo acontece com as letras. Então,

- no sistema atual, com **3 letras e 4 algarismos**, é possível obter, no máximo, $(26 \cdot 26 \cdot 26) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) : 26^3 \cdot 10^4$ placas;
- se o novo sistema fosse implantado, com **4 letras e 3 algarismos**, seria possível obter um total de $(26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10) = 26^4 \cdot 10^3$ placas.

Assim, o aumento no número de placas seria igual a $26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4$, diferença essa que é igual 1,6 vez a quantidade atual, pois:

$$\frac{26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{26}{10} - 1 = 1{,}6.$$

Portanto, em relação ao número máximo de placas em vigor, o aumento obtido seria inferior ao dobro.

18.13. d

Se existem $K+3$ maneiras para se formar uma comissão, a partir de um grupo de **n** pessoas, então $C_n^2 = K+3$.

A escolha das duas pessoas, para as posições de presidente e secretário, a partir de um grupo de **n** pessoas, pode ser feita de $7K-15$ maneiras. Ou seja, $A_n^2 = 7K-15$.

Relacionando os dois resultados, temos:

$A_n^2 = C_n^2 \cdot 2!$

$7K-15 = (3K+3) \cdot 2$

$7K-15 = 6K+6 \Rightarrow K = 21$

Substituindo **K** por 21, em $C_n^2 = K+3$, temos:

$C_n^2 = 3 \cdot 21 + 3$

$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 66$

$n \cdot (n-1) = 132$

$n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 12 \\ \text{ou} \\ n = -11 \text{ (não convém, pois } n \geq 2) \end{cases}$

Portanto, **n** é um múltiplo de 3.

18.14. e

Supondo que existam apenas 4 cores disponíveis e sabendo que o mapa **deve** ser colorido com 4 cores distintas, então, necessariamente, cada uma das 4 cores disponíveis será usada para colorir ao menos uma das 7 regiões do mapa. Assim, temos três casos a considerar, conforme indicado a seguir.

Primeiro caso: Se as regiões **D**, **B** e **E** forem coloridas com três cores distintas, uma para cada região, então as cores das regiões **C** e **F** serão, necessariamente, iguais à única cor ainda não utilizada (dentre as quatro disponíveis). Restarão, então, duas possibilidades para a cor da região **G** (diferentes das cores de **E** e **F**) e uma possibilidade para a cor de **A** (igual à de **D**). Nesse caso teremos, para colorir as regiões

(D) e (B) e (E) e (C e F) e (G) e (A),

$(4) \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1 \cdot 1) \cdot (2) \cdot (1) = 48$ possibilidades.

Segundo caso: Se para as regiões **B**, **D** e **E** forem utilizadas apenas duas cores distintas ($B = E \neq D$) e as cores das regiões **C** e **F** forem iguais (diferentes das duas já utilizadas, obviamente), teremos, então, duas possibilidades para a escolha dessa cor (de **C** e **F**), uma possibilidade para a escolha da cor da região **G** (a única ainda não utilizada, dentre as quatro disponíveis) e uma para a de **A** (igual à de **D**). Nesse caso teremos, para colorir as regiões

(D) e (B) e (E) e (C e F) e (G) e (A,

$(4) \cdot (3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (1) \cdot (1) = 24$ possibilidades.

Terceiro caso: Se para as regiões **B**, **D** e **E** forem utilizadas apenas duas cores distintas ($B = E \neq D$) e as cores das regiões **C** e **F** forem diferentes entre si (e diferentes das duas já utilizadas, obviamente, devido à restrição das fronteiras), então todas as quatro cores já terão sido utilizadas até o momento. Assim, teremos duas possibilidades para a escolha da cor de **C**, uma para a de **F**, duas para a da região **G** (pois $G \neq E$ e $G \neq F$) e uma para a de **A** (igual à de **D**). Nesse caso, temos, para as regiões

(D) e (B) e (E) e (C e F) e (G) e (A,

$(4) \cdot (3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2) \cdot (1) = 48$ possibilidades.

Portanto, considerando os três casos apresentados, temos um total de $48 + 24 + 48 = 120$ maneiras distintas de se colorir o mapa.

18.15. a

Existem $P_2 = 2$ maneiras de Nair e Paulo sentarem-se nas cabeceiras da mesa.

Existem $A_{6,4} = 360$ maneiras de os quatro filhos se acomodarem nas cadeiras restantes.

O número total de maneiras de toda a família se acomodar, para desfrutar o jantar, é igual a:

$2 \cdot 360 = 720$

18.16. 05

Para escolher 3 dos Cinco Furiosos e atribuir-lhes três exercícios distintos, cada exercício a cada um dos escolhidos, existem $A_{5,3} = 60$ modos.

Para escolher seis dos dez coelhinhos como aprendizes, existem $C_{10,6} = 210$ modos.

O número de maneiras distintas como o grupo de Mestres e aprendizes pode ser formado é igual a $60 \cdot 210 = 12600$.

18.17. e

Para a escolha do colega para presidir os trabalhos, existem 5 modos. Para a escolha das 3 prioridades, dentre as 6 possíveis, existem $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ modos. Para a escolha dos 2 colegas, dentre os 7, para uma reunião com o governador, existem $C_7^2 = \frac{7.6}{2.1} = 21$ modos. Portanto, $5 \cdot 120 \cdot 21 = 12600$ é o número de respostas diferentes que cada deputado poderia dar.

18.18. c

A escolha do vigilante do posto principal pode ser realizada de 4 modos. A escolha dos postos de vigilância secundários e de seus respectivos vigilantes pode ser feita de $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ modos. Logo, o número de modos de distribuir os 4 vigilantes, atendendo às condições apresentadas, é igual a $4 \cdot 120 = 480$.

18.19. Suponha que Anselmo possua exatamente **n** papéis de cores distintas e que tenha utilizado todas as cores para embalar as 30 caixinhas. Como ele utilizou uma cor para a embalagem e outra para a fita, de todas as maneiras possíveis, então:

$A_n^2 = 30$

$n \cdot (n-1) = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$n = \frac{1 \pm 11}{2}$$

$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém, pois $n \geq 2$).

Logo, a menor quantidade de cores distintas que ele utilizou, para a confecção de todas as embalagens, é igual a 6.

18.20. a) Para escolher 2 homens, existem $C_{5,2} = 10$ modos. Para escolher 2 mulheres, existem $C_{5,2} = 10$ modos. Logo, para a escolha de 2 homens e 2 mulheres, existem $10 \cdot 10 = 100$ modos.

b) Para escolher 4 pessoas quaisquer, dentre as 10 disponíveis, existem $C_{10,4} = 210$ modos. Para formar o grupo com 4 mulheres, existem $C_{5,4} = 5$ modos.

Assim, para formar um grupo com pelo menos uma mulher, existem $210 - 5 = 205$ modos possíveis.

Aula 16

16.01. c

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 5\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$D=-2+60-6-8-18-5=21$

Como $D\neq 0$, o sistema é possível e determinado, em que a única solução é a trivial (0, 0, 0).

16.02. e

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

$D=32+6-6+8-36-4=0$

Como $D=0$, o sistema é possível e indeterminado.

Multiplicando a terceira equação por –2 e somando com a primeira, temos:

$y-10z=0\Rightarrow y=10z$

Substituindo na primeira equação, temos:

$4x+3y-2z=0$

$4x+3\cdot 10z-2z=0\Rightarrow x=-7z$

Portanto:

$x+y=-7z+10z=3z$

16.03. e

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$D=1+1+1+1+1-1=4$

Como $D\neq 0$, o sistema é possível e determinado, em que a única solução é a trivial (0, 0, 0).

16.04. d

Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter $D\neq 0$.

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & m\end{vmatrix}\neq 0$$

$9m+8+16-24-8m-6\neq 0\Rightarrow m\neq 6$

16.05. d

I. FALSA.

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -5\\ 3 & -2 & -5\\ 2 & 1 & -8\end{vmatrix}$$

$D=16-10-15-20+24+5=0$

Como $D=0$, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, que admite infinitas soluções.

II. VERDADEIRA.

Multiplicando a primeira equação por –3 e somando com a segunda, temos:

$-5y+10z=0\Rightarrow y=2z$

Substituindo na primeira equação, temos:

$x+y-5z=0$

$x+2z-5z=0\Rightarrow x=3z$

Portanto:

$y+z=2z+z=3z=x$

III. VERDADEIRA.

A solução geral do sistema é (3z, 2z, z). Portanto, as soluções inteiras são proporcionais a (3, 2, 1).

16.06. a

I. VERDADEIRA.

Um sistema homogêneo é sempre possível.

II. FALSA.

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix}$$

$D=-6-64-10+4+16+60=0$

Como $D=0$, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, que admite infinitas soluções.

III. VERDADEIRA.

Como o sistema é indeterminado, admite outras soluções além da solução trivial (0, 0, 0).

IV. FALSA.

16.07. b

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$D=3-4-a=-1-a$

Assim:

$D=0$

$-1-a=0\Rightarrow a=-1$

Se $a=-1$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $a\neq -1$, o sistema é possível e determinado.

16.08. a

Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix}1 & \alpha & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$-1+\alpha+2+2+\alpha+1=0\Rightarrow \alpha=-2$

16.09. e

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & k^2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$D=2k^2+1-3-k^2-6+1=k^2-7$

Assim:

$D=0$

$k^2-7=0\Rightarrow k=\sqrt{7}$ ou $k=-\sqrt{7}$

Se $k=\sqrt{7}$ ou $k=-\sqrt{7}$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $k\neq\sqrt{7}$ e $k\neq-\sqrt{7}$, o sistema é possível e determinado.

16.10. d

Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 4 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$9 + 4 + k^2 - 3 - 3k - 4k = 0$

$k^2 - 7k + 10 = 0 \Rightarrow k = 2$ ou $k = 5$

Portanto, a soma dos valores de **k** é 7.

16.11. e

Calculamos o determinante principal.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 2 + k^2 + k - 1 - k - 2k^2$

$D = 1 - k^2$

Assim:

$D = 0$

$1 - k^2 = 0 \Rightarrow k = 1$ ou $k = -1$

Se $k = 1$ ou $k = -1$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $k \neq 1$ ou $k \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

16.12. e

Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7m & 6 \\ 0 & 3m & 4 \\ m-1 & 2 & -m \end{vmatrix} = 0$$

$-9m^2 + 28m^2 - 28m - 18m^2 + 18m - 24 = 0$

$m^2 - 10m - 24 = 0 \Rightarrow m = 12$ ou $m = -2$

16.13. a

Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & -k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$-k - 4k + 3k + k^3 + 6 - 2 = 0$

$k^3 - 2k + 4 = 0$

$k^3 - 4k + 2k + 4 = 0$

$k \cdot (k^2 - 4) + 2 \cdot (k + 2) = 0$

$k \cdot (k - 2) \cdot (k + 2) + 2 \cdot (k + 2) = 0$

$(k + 2) \cdot (k^2 - 2k + 2) = 0$

$k + 2 = 0$ ou $k^2 - 2k + 2 = 0$

- $k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$
- $k^2 - 2k + 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

16.14. d

Multiplicamos a primeira equação por 2 e somamos com a segunda.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 10x + 5y = 0 \end{cases}$$

Assim:

$10x + 5y = 0 \Rightarrow y = -2x$

$3x + 2y + z = 0 \Rightarrow 3x + 2 \cdot (-2x) + z = 0 \Rightarrow z = x$

A solução geral do sistema é $(x, -2x, x)$. Portanto, as soluções inteiras são proporcionais a $(1, -2, 1)$.

16.15. e

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$3y + 2z = 0 \Rightarrow 2z = -3y$

$4x + y + 2z = 0 \Rightarrow 4x + y - 3y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$2z = -3y \Rightarrow 2z = -3 \cdot 2x \Rightarrow z = -3x$

A solução geral do sistema é $(x, 2x, -3x)$. Portanto, as soluções inteiras são proporcionais a $(1, 2, -3)$.

16.16. c

Calculamos o determinante principal.

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & 1 \\ 1 & 2\cos a \end{vmatrix}$$

$D = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a - 1$

$D = \operatorname{sen}(2a) - 1$

Assim:

$D = 0$

$\operatorname{sen}(2a) - 1 = 0$

$\operatorname{sen}(2a) = 1 \Rightarrow 2a = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Se $a = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $a \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, o sistema é possível e determinado.

Portanto, o sistema tem solução não trivial para uma infinidade de valores de **a**.

16.17. 08

01) INCORRETA.

Uma matriz quadrada de ordem 12 tem $12 \cdot 12 = 144$ elementos.

02) INCORRETA.

O produto **A** · **B** é possível quando o número de colunas da matriz **A** for igual ao número de linhas da matriz **B**.

04) INCORRETA.

A inversa de uma matriz, quando existe, é única.

08) CORRETA.

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 4 & x & x \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$$

$x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 4x^2 - 4x^2 = 0$

$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

$x \cdot (x^2 - 8x + 16) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x = 4$ (raiz dupla)

Portanto, a soma das raízes da equação é $0 + 4 + 4 = 8$.

16) INCORRETA.

Calculamos o determinante principal.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$$

Como $D \neq 0$, o sistema é determinado.

16.18. e

Calculamos o determinante principal.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + 1 & a_1 + 2 & \cdots & a_1 + n - 1 \\ a_2 & a_2 + 1 & a_2 + 2 & \cdots & a_2 + n - 1 \\ a_3 & a_3 + 1 & a_3 + 2 & \cdots & a_3 + n - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n + 1 & a_n + 2 & \cdots & a_n + n - 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos a primeira coluna por –1 e somamos com a segunda.
Multiplicamos a primeira coluna por –2 e somamos com a terceira.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 2 & \cdots & a_1+n-1 \\ a_2 & 1 & 2 & \cdots & a_2+n-1 \\ a_3 & 1 & 2 & \cdots & a_3+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 2 & \cdots & a_n+n-1 \end{vmatrix}$$

Como a segunda e a terceira colunas são proporcionais, então D = 0. Portanto, o sistema tem infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números a_1, ..., a_n dados.

Observação:
O determinante D é igual a zero supondo que n ≥ 3. Para n = 1 ou n = 2, temos:

$n=1 \Rightarrow D=|a_1|=a_1$

$n=2 \Rightarrow D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}=a_1-a_2$

Nesses dois casos, o sistema pode ser determinado ou indeterminado.

16.19. Para que o sistema não admita soluções próprias, isto é, seja possível e determinado, devemos ter D ≠ 0.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 6 & m & 2 \end{vmatrix}\neq 0$$

$6-6m+m^2-6-2m^2+3m\neq 0$

$m^2+3m\neq 0 \Rightarrow m\neq 0 \text{ e } m\neq -3$

16.20. a)

$$x\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+z\cdot\begin{bmatrix}-1\\-10\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\\2x-10z=0\\-x+y+7z=0\end{cases}$$

Calculamos o determinante principal.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 0 & -10\\-1 & 1 & 7\end{vmatrix}$$

$D=20-2-28+10=0$

Como D = 0, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, existem infinitas triplas ordenadas (x, y, z) de números que satisfazem a equação matricial.

b) $\begin{cases}2x+y=a\\5x+3y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

Multiplicamos os dois membros da equação por $\begin{bmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a-b\\-5a+2b\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a-b\\-5a+2b\end{bmatrix}\Rightarrow x=3a-b \text{ e } y=-5a+2b$

A solução do sistema é (3a – b, – 5a + 2b).

Aula 17

17.01. b
A ordenada de um ponto que pertence ao eixo das abscissas é igual a zero.
$3x-9=0 \Rightarrow x=3$

17.02. c
A abscissa e a ordenada de um ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares são iguais.
$x^2-x=4x-6$
$x^2-5+6=0 \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=3$
Portanto, o conjunto dos valores de **x** é {2, 3}.

17.03. b
$a>0 \text{ e } b<0 \Rightarrow -a<0 \text{ e } a-b>0$
Portanto, o ponto P(–a, a – b) pertence ao 2º. quadrante.

17.04. e
O ponto $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pois as coordenadas são iguais.

17.05. b
Um ponto que pertence ao quarto quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa.
Assim:
$1-a>0 \Rightarrow a<1$
$b+2<0 \Rightarrow b<-2$

17.06. a
$(x+3y, -x-y)=(4+y, 2x+y)$

$$\begin{cases}x+3y=4+y\\-x-y=2x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=4\\-3x=2y\end{cases}\Rightarrow x=-2 \text{ e } y=3$$

Portanto, $x^y=(-2)^3=-8$.

17.07. c
A ordenada do ponto **P** é 3.
Assim:
$2y-x+2=0$
$2\cdot 3-x+2=0 \Rightarrow x=8$
Portanto:
P (8, 3)

17.08. c
Sejam (a, b) e (c, d) os pontos que dividem o segmento de extremidades A (–2, –3) e B (6, 9) em três segmentos congruentes. As abscissas e as ordenadas desses pontos formam progressões aritméticas.
Assim:
(–2, a, c, 6) PA
$a_4=a_1+3r$
$6=-2+3r \Rightarrow r=\frac{8}{3}$
$a=-2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$
$c=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$
(–3, b, d, 9) PA
$a_4=a_1+3r$
$9=-3+3r \Rightarrow r=4$
$b=-3+4=1$
$d=1+4=5$
Portanto, a soma das abscissas dos pontos que dividem o segmento é $\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=\frac{12}{3}=4$.

17.09. e

$AM = 3 \cdot AB$

$M - A = 3 \cdot (B - A)$

Assim:

$x_M - x_A = 3 \cdot (x_B - x_A)$

$x_M - 3 = 3 \cdot (1 - 3) \Rightarrow x_M = -3$

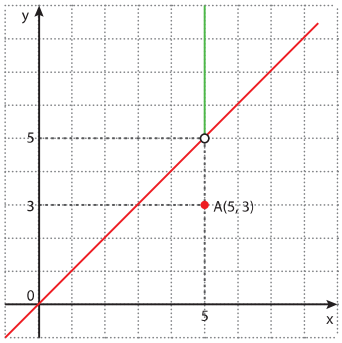
$y_M - y_A = 3 \cdot (y_B - y_A)$

$y_M - 1 = 3 \cdot (2 - 1) \Rightarrow x_M = 4$

Portanto:

M (–3, 4)

17.10. a



Observe na figura que para que os pontos A e B pertençam a semiplanos opostos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, devemos ter $y > 5$.

17.11. d

Multiplicando-se a matriz **M** por **k**, temos:

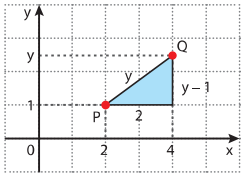
$$M \cdot k = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 4k \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix}$$

O triângulo de vértices (0, 0), (2k, 0) e (4k, 3k) tem base de medida 2k e altura relativa a essa base de medida 3k.

Área do triângulo A'B'C':

$$\text{Área}(A'B'C') = \frac{2k \cdot 3k}{2} = \frac{6k^2}{2} = 3k^2$$

17.12. b



No triângulo retângulo destacado na figura, temos:

$y^2 = (y-1)^2 + 2^2$

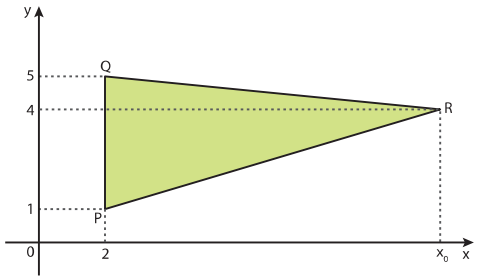
$y^2 = y^2 - 2y + 1 + 4$

$2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

Portanto:

$Q\left(4, \frac{5}{2}\right)$

17.13. e



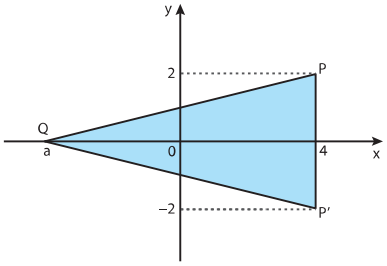
Como a área do triângulo PQR é igual a 20, temos:

$\frac{(5-1) \cdot (x_0 - 2)}{2} = 20$

$4 \cdot (x_0 - 2) = 40$

$x_0 - 2 = 10 \Rightarrow x_0 = 12$

17.14. b



Como a área do triângulo QPP' é igual a 16, temos:

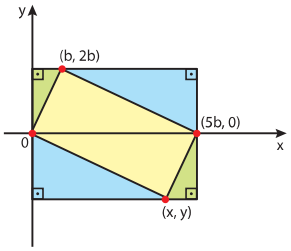
$\frac{[(2-(-2)] \cdot (4-a)}{2} = 16$

$4 \cdot (4 - a) = 32$

$4 - a = 8 \Rightarrow a = -4$

17.15. c

Na figura a seguir, os triângulos com uma mesma cor são congruentes.



Assim:

$x - 0 = 5b - b$

$x = 4b$

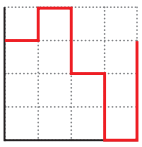
$0 - y = 2b - 0$

$y = -2b$

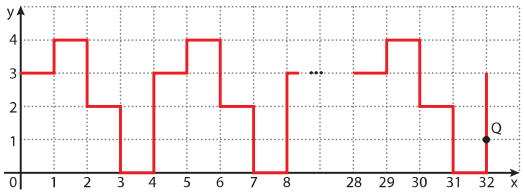
Portanto, as coordenadas do quarto vértice são (4b, 2b).

17.16. c

Observe que a poligonal é periódica, em que cada ciclo é formado por 12 segmentos de reta.



Como $94 = 12 \cdot 7 + 10$, para chegar ao ponto **Q**, temos 7 ciclos completos mas 10 segmentos de reta no oitavo ciclo. Cada ciclo ocupa 4 unidades no eixo das abscissas. Assim, o oitavo ciclo se inicia em um ponto de abscissa $7 \cdot 4 = 28$.



17.17. e

A abscissa do vértice oposto à base de cada triângulo isósceles é a média aritmética das abscissas dos vértices da base, pois a base é paralela ao eixo das abscissas.

Primeiro triângulo: $\frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$

Segundo triângulo: $\frac{3,5+6,5}{2} = 5$

Terceiro triângulo: $\frac{8+11}{2} = \frac{19}{2} = 9,5$

As abscissas formam uma progressão aritmética.

(0,5; 5; 9,5;...) PA

$r = 5 - 0,5 = 4,5$

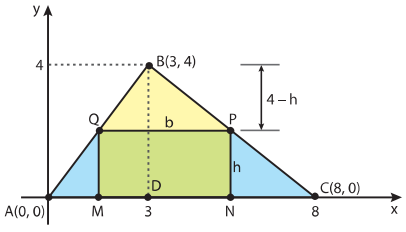
$a_{18} = a_1 + 17 \cdot r$

$a_{18} = 0,5 + 17 \cdot 4,5$

$a_{18} = 77$

17.18. d

Sejam **b** e **h**, respectivamente, as medidas da base e da altura do retângulo MNPQ.



Os triângulos ABC e QBP são semelhantes.

$\frac{8}{b} = \frac{4}{4-h} \Rightarrow b = 8 - 2h$

Área do triângulo MNPQ:

$S = b \cdot h$

$S = (8 - 2h) \cdot h$

$S = -2h^2 + 8h$

O valor que **h** para o qual a área é máxima é a abscissa do vértice da parábola que representa a função.

$h = \frac{-8}{2 \cdot (-2)} = 2$

Assim:

$b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$

Os triângulos AMQ e ADB são semelhantes.

$\frac{AM}{AD} = \frac{MQ}{DB} \Rightarrow \frac{AM}{3} = \frac{2}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}$

Portanto, o ponto é $\left(\frac{3}{2} + 4, 2\right) = \left(\frac{11}{2}, 2\right)$.

17.19. a) $40 \text{ min} = \frac{40}{60} h = \frac{2}{3} h$

Portanto, o ponto que representa a chegada de ambas as pessoas ao local de encontro exatamente aos 40 minutos é $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

b) Como a pessoa esperou por 10 minutos, então a pessoa A chegou ao local aos 30 minutos.

Assim:

$20 \text{ min} = \frac{20}{60} h = \frac{1}{3} h$

$30 \text{ min} = \frac{30}{60} h = \frac{1}{2} h$

Portanto, o ponto correspondente é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

17.20. a) Os pontos **A** e **D** são simétricos em relação à origem. Assim, D (–1, –k).

Como a ordenada do ponto **D** é igual a –2, temos:

$-k = -2 \Rightarrow k = 2$

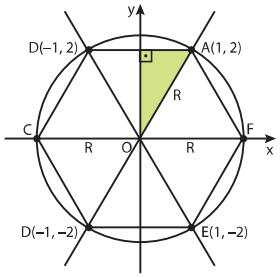
O valor da constante **k** é 2.

b) Como k = 2, então A(1, 2) e D(–1, –2).

Os pontos **A** e **B** são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Assim, B(–1, 2).

Os pontos **E** e **D** são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Assim, E(1, –2).

Seja **R** o raio da circunferência.



No triângulo retângulo destacado na figura, temos:

$R^2 = 1^2 + 2^2$

$R^2 = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$

Assim, $C(-\sqrt{5}, 0)$ e $F(\sqrt{5}, 0)$.

Portanto:

$A(1, 2), B(-1, 2), C(-\sqrt{5}, 0)$

$D(-1, -2), E(1, -2), F(\sqrt{5}, 0)$

c) A área do hexágono ABCDEF é o dobro da área do trapézio CFAB.

Assim:

$\text{Área(ABCDEF)} = 2 \cdot \text{Área(CFAB)}$

$\text{Área(ABCDEF)} = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}+2}{2} \right) \cdot 2$

$\text{Área(ABCDEF)} = 4\sqrt{5}+4$

Portanto:

$Q = \frac{\text{Área(ABCDEF)}}{4} = \frac{4\sqrt{5}+4}{4} = \sqrt{5}+1$

$\sqrt{Q \cdot (Q-2)} = \sqrt{(\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}+1-2)}$

$\sqrt{Q \cdot (Q-2)} = \sqrt{(\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}-1)}$

$\sqrt{Q \cdot (Q-2)} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

Aula 18

18.01. e

$x_M = \frac{-3+11}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$y_M = \frac{7+15}{2} = \frac{22}{2} = 11$

O ponto médio do segmento é M = (4, 11).

18.02. d

$x_M = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$y_M = \frac{-2+(-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

O ponto médio do segmento AB é M = (2, –3).

18.03. c

$x_G = \frac{-5+1+19}{3} = \frac{15}{3} = 5$

$y_G = \frac{-5+5+0}{3} = \frac{0}{3} = 0$

O baricentro do triângulo ABC é G = (5, 0).

18.04. b

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |8+2-4|$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

18.05. d

Partindo do vértice **A** e seguindo o sentido horário, temos:

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |12+24+12-12-48-24|$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |-36| = 18$

18.06. e

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & K & 3 \end{vmatrix} = 0$

$7+2K+12-K-28-6=0$

$K = 15$

18.07. d

Para que o ponto C esteja sobre o eixo das abscissas, devemos ter b = 0.

Como os pontos **A**, **B** e **C** são colineares, temos:

$\begin{vmatrix} -1 & 3 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$-1+2a-a-6=0$

$a = 7$

Portanto, a = 7 e b = 0.

18.08. a

Os lados do triângulo equilátero ABC medem 8 – 2 = 6.

A altura do triângulo ABC é $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

A abscissa do ponto **A** é a média aritmética das abscissas dos pontos B e C, ou seja, $\frac{2+8}{2} = 5$.

A ordenada do ponto **A** é $4+h = 4+3\sqrt{3}$.

Portanto:

$A = (5, 4+3\sqrt{3}) = (5, 4+\sqrt{27})$

18.09. c

$x_G = 1$

$\frac{3+(-3)+x_C}{3} = 1 \Rightarrow x_C = 3$

$y_G = 1$

$\frac{4+2+y_C}{3} = 1 \Rightarrow x_C = -3$

Portanto:

C = (3, –3)

18.10. e

$\text{Área} = 20$

$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & 2 & x \\ 4 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 20$

$|x+10+8-5x-2-8| = 40$

$|-4x+8| = 40$

$-4x+8 = 40$ ou $-4x+8 = -40$

$x = -8$ ou $x = 12$

18.11. d

Se os catetos AC e AB estão sobre os eixos do sistema cartesiano, então A = (0, 0), B = (b, 0) e C = (0, c). Como o ponto médio da hipotenusa BC é M = (–1, 3), temos:

$\frac{b+0}{2} = -1 \Rightarrow b = -2$

$\frac{0+c}{2} = 3 \Rightarrow c = 6$

Portanto, a soma das coordenadas dos vértices do triângulo é b+ c = –2 + 6 =4.

Observação:

Consideramos o vértice B sobre o eixo das abscissas e o vértice C sobre o eixo das ordenadas. Também poderíamos ter B = (0, b) e C = (c, 0).

18.12. d

Os pontos **A**, **P** e **Q** são colineares.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & 1 \\ 4 & q & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$q + 4p - pq = 0$

Se p = q, temos:

$p + 4p - p \cdot p = 0$

$p^2 - 5p = 0 \Rightarrow p = 0$ ou $p = 5$

Como p = 0 não faz sentido, p = 5.

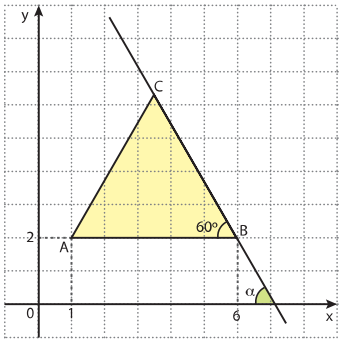
Assim:

P(5, 0)

Q(0, 5)

$$\text{Área}(OPQ) = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$$

18.13. e

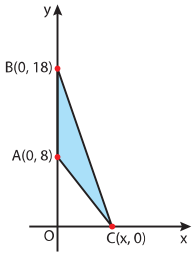


Observe na figura que $\alpha = 60°$.

Portanto:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

18.14. a



$AB = 18 - 8 = 10$

$AC = AB = 10$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo AOC, temos:

$(AC)^2 = (AO)^2 + (OC)^2$

$10^2 = 8^2 + x^2$

$x^2 = 100 - 64$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

A área do triângulo ABC é a diferença entre a área do triângulo BOC e a área do triângulo AOC.

$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(BOC) - \text{Área}(AOC)$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{6 \cdot 18}{2} - \frac{6 \cdot 8}{2}$$

$\text{Área}(ABC) = 54 - 24 = 30$

18.15. e

Sejam **M**, **N**, **P** e **Q**, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA.

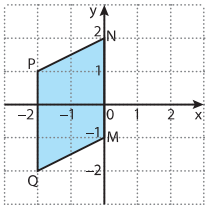
$$M = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (0, -1)$$

$$N = \left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (0, 2)$$

$$P = \left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (-2, 1)$$

$$Q = \left(\frac{-1+(-3)}{2}, \frac{-1+(-3)}{2}\right) = (-2, -2)$$

Observe na figura o quadrilátero MNPQ:



O quadrilátero MNPQ é um paralelogramo.

18.16. b

Sejam A(1, 4), B(–2, 6) e C(0, 8) os vértices consecutivos do paralelogramo ABCD. Os vértices **A** e **C** são extremidades da diagonal $\overline{AC}$.

Seja **M** o ponto médio de $\overline{AC}$.

$$M = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 6\right)$$

Sendo D(a, b) o quarto vértice do paralelogramo, **M** também é o ponto médio da diagonal BD.

Assim:

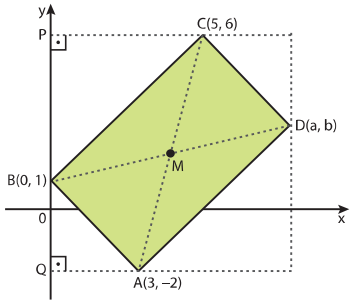
$$\frac{-2+a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{6+b}{2} = 6 \Rightarrow b = 6$$

A soma das coordenadas do vértice **D** é 3 + 6 = 9.

18.17. 14 (02, 04, 08)

Observe a representação do retângulo ABCD.



01) INCORRETO.

Triângulo retângulo BPC:

$(BC)^2 = (BP)^2 + (PC)^2$

$(BC)^2 = 5^2 + 5^2$

$(BC)^2 = 2 \cdot 5^2 \Rightarrow BC = 5\sqrt{2}$

Triângulo retângulo AQB:

$(AB)^2 = (AQ)^2 + (QB)^2$

$(AB)^2 = 3^2 + 3^2$

$(AB)^2 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$

Portanto, a maior das dimensões da reserva ambiental é $5\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

02) CORRETO.

Área = AB · BC

$Área = 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$

Área = 30

A área da reserva é de 30 unidades de área.

04) CORRETO.

Perímetro da reserva:

$2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 3\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

Como $16\sqrt{2} > 16$, o perímetro da reserva é maior que 16 unidades de comprimento.

08) CORRETO.

Como M é o ponto médio das diagonais AC e BD, temos:

$\frac{3+5}{2} = \frac{0+a}{2} \Rightarrow a = 8$

$\frac{-2+6}{2} = \frac{1+b}{2} \Rightarrow b = 3$

Portanto, o vértice **D** é (8, 3).

18.18. b

Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ os vértices do triângulo ABC.

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = -1 \\ y_A + y_B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2 \\ y_A + y_C = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 1 \\ y_B + y_C = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} x_A + x_B = -1 \\ x_A + x_C = 2 \\ x_B + x_C = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_A + 2x_B + 2x_C = 2 \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 1$$

$$\begin{cases} y_A + y_B = 3 \\ y_A + y_C = 3 \\ y_B + y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y_A + 2y_B + 2y_C = 6 \Rightarrow y_A + y_B + y_C = 3$$

Baricentro do triângulo ABC:

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3}$

$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$G = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

18.19. 22

$$Área(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$Área(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{2} \cdot |12 + 48 + 10 - 6 - 20|$$

$$Área(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{2} \cdot |44|$$

$Área(P_1P_2P_3P_4) = 22$

18.20. Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ os vértices do triângulo ABC e $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (3, 4)$ e $M_3 = (1, -1)$ os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente.

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ y_A + y_B = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = 3 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 6 \\ y_A + y_C = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = 1 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = -2 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A + x_C = 6 \\ x_B + x_C = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x_A + 2x_B + 2x_C = 10 \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 5$$

$2 + x_C = 5 \Rightarrow x_C = 3$

$6 + x_B = 5 \Rightarrow x_B = -1$

$2 + x_A = 5 \Rightarrow x_A = 3$

$$\begin{cases} y_A + y_B = 4 \\ y_A + y_C = 8 \\ y_B + y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow 2y_A + 2y_B + 2y_C = 10 \Rightarrow y_A + y_B + y_C = 5$$

$4 + y_C = 5 \Rightarrow y_C = 1$

$8 + y_B = 5 \Rightarrow y_B = -3$

$-2 + y_A = 5 \Rightarrow y_A = 7$

Portanto:

A = (3, 7)

B = (−1, −3)

C = (3, 1)

Aula 16

16.01. F – V – V – V – F

a) FALSO.
Duas retas paralelas a um plano podem ser paralelas entre si, concorrentes ou reversas.

e) FALSO.
Existem infinitos planos paralelos a duas retas reversas. Além disso, existe um plano que contém uma delas e é paralelo à outra.

16.02. F – F – V – V – V

a) FALSO.
Se a reta for concorrente com o plano, não existe no plano uma reta paralela à reta dada.

b) FALSO.
Se as retas forem concorrentes, não existe um plano que passa por um e é paralelo à outra.

16.03. b

a) FALSA.
Duas retas não paralelas podem ser concorrentes ou reversas.

c) FALSA.
As retas podem ser paralelas ou reversas.

d) FALSA.
As três retas podem ser todas coplanares ou coplanares duas a duas, mas não as três contidas em um mesmo plano.

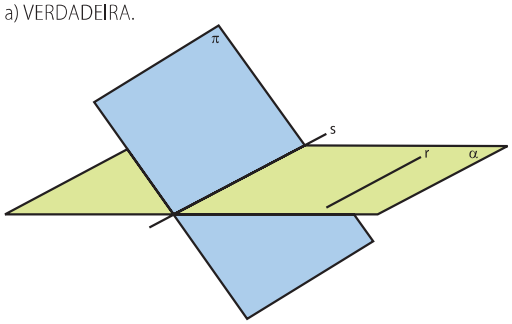
e) FALSA.
Três retas concorrentes em um único ponto podem ser coplanares ou não coplanares.

16.04. a

As retas **r** e **s** são reversas e ortogonais, pois formam entre si um ângulo reto. Como as retas são reversas, não existe um plano que as contêm. Além disso, a intersecção de **r** e **s** é vazia.

16.05. a

a) VERDADEIRA.



Como a reta **r** é paralela ao plano π, as retas **r** e **s** não têm ponto em comum. Como as retas **r** e **s** são coplanares, elas são paralelas.

b) FALSA.
Os planos α e π podem ser paralelos ou concorrentes.

c) FALSA.
Os planos α e π podem ser perpendiculares ou não.

d) FALSA.
Os planos α e π são distintos.

16.06. b

I. VERDADEIRA.
II. VERDADEIRA.
III. FALSA.
Duas retas distintas podem ser coplanares ou reversas (não coplanares).
IV. VERDADEIRA.

16.07. e

Se dois planos são paralelos, uma reta paralela a um deles é paralela ao outro plano ou está contida no outro plano.

16.08. b

I. FALSA.
Duas retas reversas não determinam um plano.
II. FALSA.
Duas retas paralelas a um plano podem ser paralelas entre si, concorrentes ou reversas.
III. VERDADEIRA.

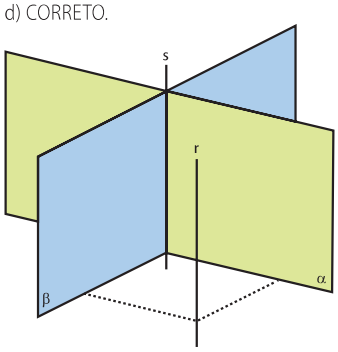
16.09. d

a) INCORRETO.
Os planos podem ser paralelos entre si ou concorrentes.

b) INCORRETO.
As retas podem ser paralelas entre si ou reversas.

c) INCORRETO.
Duas retas paralelas a um plano podem ser paralelas entre si, concorrentes ou reversas.

d) CORRETO.



A reta **r** é paralela à reta **s** e paralela aos planos α e β.

e) INCORRETO.
Os planos podem ser paralelos entre si ou concorrentes.

16.10. e

a) FALSA.
As retas AD e EH são paralelas.

b) FALSA.
As retas AE e BF são paralelas.

c) FALSA.
As retas AH e FH são concorrentes, assim como as retas CF e FH.

d) FALSA.
As retas AE e DH são paralelas.

e) VERDADEIRA.
As três retas são duas a duas reversas.

16.11. a

b) FALSA.
Se a reta **r** não for paralela a um plano α, não é possível conduzir por **r** um plano paralelo ao plano α.

c) FALSA.
Considere que **r** e **s** são retas reversas e **P** um ponto que determina com **r** um plano paralelo a **s**.
Nesse caso, toda reta que passa por **P** e intersecta a reta **r** não intersecta a reta **s**.

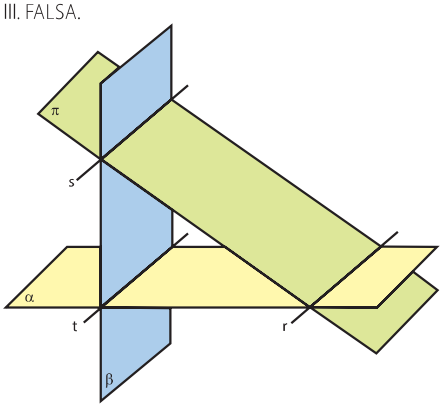
d) FALSA.
Os planos podem ser paralelos entre si ou concorrentes.

e) FALSA.
Dois planos ou são paralelos ou são concorrentes.

16.12. b

I. VERDADEIRA.
Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si, ou seja, são coplanares.

II. FALSA.
Duas retas paralelas a um plano podem ser paralelas entre si, concorrentes ou reversas.
III. FALSA.

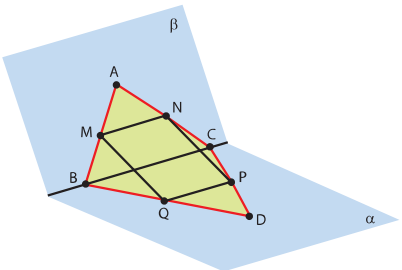


O plano π intersecta os planos α e β nas retas paralelas **r** e **s**. Porém, α e β não são paralelos entre si.

16.13. a
I. VERDADEIRA.
II. VERDADEIRA.
III. FALSA.
Se duas retas são paralelas, então são coplanares.
Se duas retas são coplanares, então são paralelas ou concorrentes.
IV. VERDADEIRA.
V. VERDADEIRA.

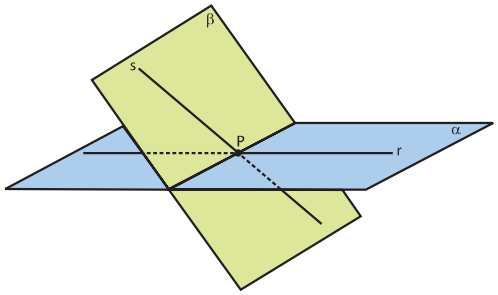
16.14. d
I. FALSA.
Duas retas coplanares são paralelas ou concorrentes.
II. FALSA.
Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas ou reversas.
III. VERDADEIRA.
Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são reversas. Considere um ponto **P** da reta **s**. Pelo ponto **P** passa uma única reta **t** paralela a **r**. Assim, as retas **s** e **t** determinam um único plano α paralelo a **r**. Analogamente, existe um único plano β, paralelo a **s**. Os planos α e β são paralelos entre si, pois em cada um existem duas concorrentes paralelas ao outro.

IV. VERDADEIRA.
Um quadrilátero é denominado reverso se não existe um plano que contém seus quatro vértices.
Na figura a seguir, o quadrilátero ABCD é reverso.



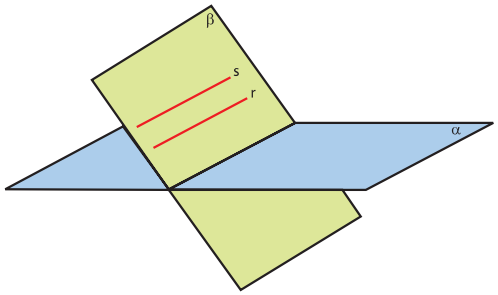
Sejam **M**, **N**, **P** e **Q** os pontos médios dos lados do quadrilátero reverso ABCD. Como **M** e **N** são pontos médios dos lados AB e AC do triângulo ABC, o segmento MN é paralelo ao segmento BC e $MN = \frac{BC}{2}$. Analogamente, $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$ e $PQ = \frac{BC}{2}$, $\overline{NP} \,//\, \overline{AD}$ e $NP = \frac{AD}{2}$, $\overline{QM} \,//\, \overline{AD}$ e $QM = \frac{AD}{2}$. Portanto, o quadrilátero MNPQ é um paralelogramo.

16.15. b
I. FALSA.
Uma reta do plano pode ser paralela ou reversa à reta dada.
II. FALSA.
Uma reta de um dos planos pode ser concorrente com o outro, pode ser paralela ao outro ou estar contida no outro.
III. VERDADEIRA.



As retas **r** e **s** são concorrentes.
IV. FALSA.
Duas retas que não têm ponto comum podem ser paralelas ou reversas.

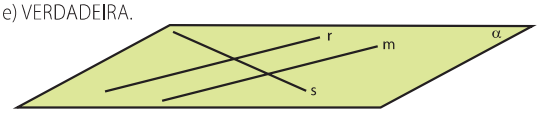
16.16. b
I. FALSA.
Existem infinitas retas de um dos planos que são paralelas ao outro.
II. FALSA.
Os planos podem ser concorrentes. Na figura a seguir as retas **r** e **s** do plano β são paralelas ao plano α.



III. VERDADEIRA.
IV. VERDADEIRA.
V. FALSA.
Uma reta paralela a um plano é paralela ou reversa a uma reta desse plano.

16.17. e
a) FALSA.
Três pontos colineares não determinam um plano.
b) FALSA.
Uma reta e um ponto pertencente a ela não determinam um plano.
c) FALSA.
Se dois planos têm um ponto em comum, eles têm uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.
d) FALSA.
Uma reta paralela a um plano é paralela ou reversa a uma reta desse plano.

e) VERDADEIRA.



Toda reta **m** do plano, que é paralela a **r**, é concorrente com a reta **s**.

16.18. b

a) FALSA.
Existem infinitas retas de α que são paralelas a **r** e infinitas retas de α que são reversas a **r**.

b) VERDADEIRA.

c) FALSA.
Nenhuma reta de α é concorrente com a reta **r**.

d) FALSA.
Existe um plano β que contém **r** e é paralelo ao plano α. Assim, os planos α e β não se intersectam.

16.19. Os pares de arestas reversas são:
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.
Os pares de arestas concorrentes são:
$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$;
$\overline{AC}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$;
$\overline{AD}$ e $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$.

16.20.

a) VERDADEIRA. Observe que, se as retas que contêm as diagonais do quadrilátero não fossem reversas, seriam coplanares e, assim, os quatro vértices tambem o seriam. Porém, isso contraria a definição de quadrilátero reverso.

b) FALSA. Se os lados opostos fossem paralelos, existiria um plano contendo esses lados e consequentemente, seus quatro vértices. Novamente uma contradição com a definição.

c) FALSA. Existem dois pares de lados reversos:
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Aula 17

17.01. c

Se a reta **b** não é perpendicular ao plano, então é paralela ao plano, ou está contida no plano ou é oblíqua (concorrente e não perpendicular) ao plano. Em qualquer um desses casos, existe um único plano que passa por **b** e é perpendicular a α.

17.02. c

a) FALSA.
Os planos podem ser paralelos entre si ou concorrentes.

b) FALSA.
Os planos são paralelos entre si.

d) FALSA.
Duas retas paralelas a um plano podem ser paralelas entre si, concorrentes ou reversas.

e) FALSA.
Os planos podem ser perpendiculares entre si, ou concorrentes não perpendiculares ou paralelos.

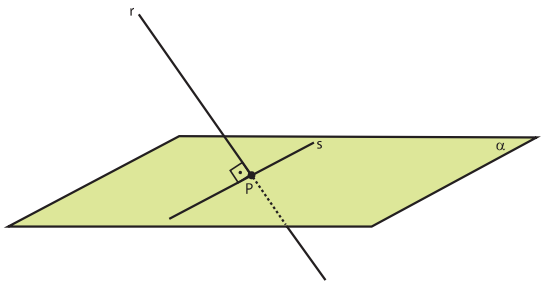
17.03. a

I. VERDADEIRA.

II. FALSA.
Uma reta que tenha um ponto sobre um plano pode estar contida no plano ou ser concorrente com o plano.

III. VERDADEIRA.

IV. FALSA.



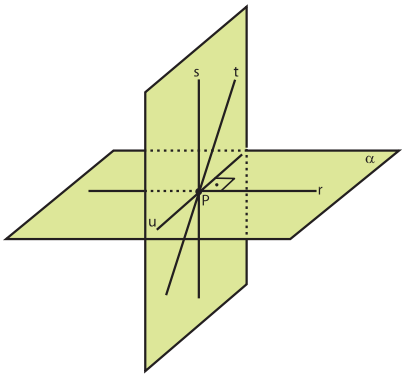
A reta **r** é perpendicular à reta **s** no ponto **P**, mas não é perpendicular ao plano α.

17.04. c

I. FALSA.
As retas podem ser paralelas entre si ou reversas.

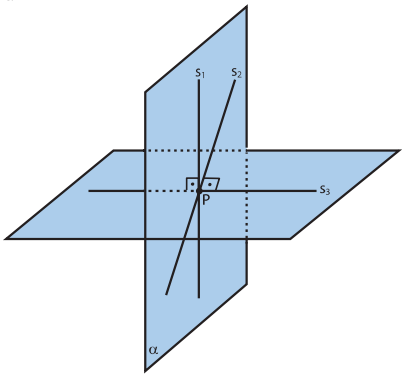
II. FALSA.
As retas podem ser reversas entre si ou paralelas.

III. FALSA.
A reta pode ser perpendicular ao plano, ou estar contida no plano ou ser oblíqua ao plano.



IV. FALSA.
Uma reta perpendicular à reta dada pode ser perpendicular ao plano, oblíqua ao plano ou paralela ao plano.

17.05. d



As retas s_1 e s_2 são concorrentes, podendo ser perpendiculares entre si ou não. Como s_1 e s_2 são perpendiculares a s_3, elas estão contidas em um plano perpendicular a s_3.

17.06. c

I. FALSA.
Existem infinitos planos paralelos a duas retas reversas.

II. FALSA.
A reta pode ser perpendicular ao plano, ou oblíqua ao plano ou paralela ao plano ou estar contida no plano.

III. VERDADEIRA.
Quatro pontos não coplanares determinam $C_4^3 = 4$ planos.

IV. FALSA.
Uma reta perpendicular a um dos planos pode ser paralela ao outro ou estar contida no outro.

17.07. d

I. VERDADEIRA.

II. FALSA.

Uma reta paralela a um dos planos pode ser paralela ao outro, oblíqua ao outro, perpendicular ao outro ou estar contida no outro.

III. VERDADEIRA.

17.08. c

A reta **r** pode estar contida em α, pode ser oblíqua ao plano α ou perpendicular ao plano α. Portanto, **r** pode ser paralela ao plano β, ou oblíqua a β ou perpendicular a β.

17.09. a

I. CORRETA.

II. CORRETA.

Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si, ou seja, coplanares.

III. INCORRETA.

A reta é ortogonal, mas não perpendicular, a todas as retas do plano.

17.10. c

a) INCORRETA.

Uma reta perpendicular à reta dada pode ser paralela ao plano, oblíqua ao plano ou perpendicular ao plano.

b) INCORRETA.

Se as retas do plano forem paralelas entre si, uma reta perpendicular a ambas está contida no plano.

c) VERDADEIRA.

Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com todas as retas desse plano.

d) FALSA.

A reta pode estar contida no plano ou ser perpendicular ao plano, ou ser oblíqua ao plano ou ser paralela ao plano.

e) FALSA.

Para uma reta ser perpendicular a um plano é necessário e suficiente que ela forme ângulo reto com duas concorrentes desse plano.

17.11. 09 (01, 08)

01) CORRETO.

02) INCORRETO.

A reta **t** pode ser concorrente com **r** ou reversa a **r**.

04) INCORRETO.

A reta **r** pode estar contida no plano β ou ser paralela ao plano β.

08) CORRETO.

16) INCORRETO.

As três retas podem ser paralelas e coplanares ou coplanares duas a duas, mas não as três contidas em um mesmo plano.

17.12. 28 (04, 08, 16)

01) INCORRETO.

Se as retas forem reversas, não existe um plano que contém ambas.

02) INCORRETO.

Se dois planos são concorrentes, não existe uma reta perpendicular a ambos.

04) CORRETO.

08) CORRETO.

16) CORRETO.

17.13. a

Se **r** e **s** forem paralelas, existem infinitas retas perpendiculares a ambas.

Se **r** e **s** forem concorrentes, existem uma única reta perpendicular a ambas.

Se **r** e **s** forem reversas, existem uma única reta perpendicular a ambas.

17.14. 06 (02, 04)

01) INCORRETO.

Os planos podem ser paralelos entre si ou concorrentes.

02) CORRETO.

04) CORRETO.

08) INCORRETO.

Existem infinitas retas de α que são paralelas a **r** e infinitas retas de α que são reversas a **r**.

16) INCORRETO.

Um plano perpendicular a α pode ser paralelo ao plano β ou concorrente com β.

17.15. 22 (02, 04, 16)

01) INCORRETO.

Dois planos paralelos a uma mesma reta podem ser paralelos entre si ou concorrentes.

02) CORRETO.

04) CORRETO.

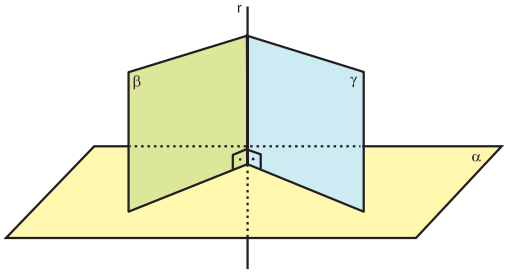
Uma reta ortogonal a um plano forma ângulo reto com qualquer reta desse plano.

08) INCORRETO.

Duas retas paralelas a um plano podem ser paralelas entre si, ou concorrentes, ou reversas.

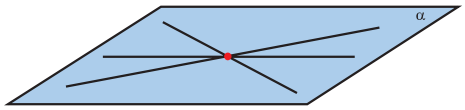
16) CORRETO.

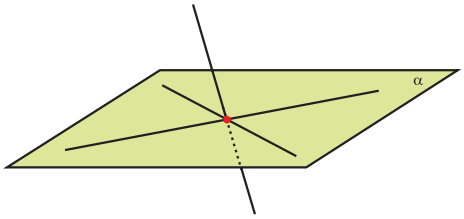
Na figura a seguir, a intersecção dos planos concorrentes β e γ, perpendiculares ao plano α, é a reta **r**, perpendicular a α.



32) INCORRETO.

As três retas podem coplanares ou não, como mostram as figuras a seguir.





17.16. 05 (01, 04)

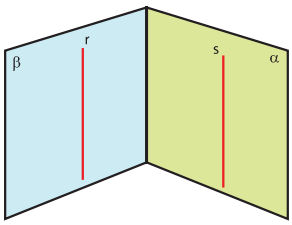
01) CORRETO.

02) INCORRETO.

Existem infinitas retas de α que são paralelas a **r** e infinitas retas de α que são reversas a **r**.

04) CORRETO.

Na figura a seguir as retas **r** e **s** são paralelas, enquanto os planos α e β não são paralelos.

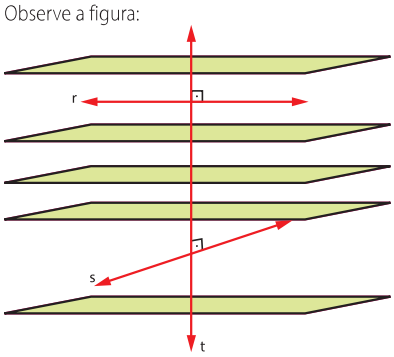


08) INCORRETO.
Dois planos perpendiculares a um terceiro podem ser paralelos entre si ou concorrentes.
16) INCORRETO.
As retas **r** e **t** podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

17.17. c
a) FALSA.
Se uma reta "fura" um plano, ou seja, é concorrente com o plano, existe um único ponto comum entre eles.
b) FALSA.
A projeção ortogonal de uma reta paralela ou de uma reta oblíqua ao plano de projeção é uma reta. A projeção ortogonal de uma reta perpendicular ao plano de projeção é um ponto.
c) VERDADEIRA.
d) FALSA.
As intersecções de um plano com dois planos paralelos são retas paralelas.
e) FALSA.
Se uma reta é concorrente com um plano, não é possível traçar no plano uma reta paralela à reta dada.

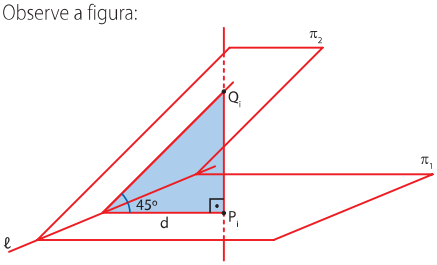
17.18. 19 (01, 02, 16)
01) CORRETO.
A reta **r** é perpendicular a todas as retas do plano α que passam pelo ponto **P**.
02) CORRETO.
Todo plano que contém a reta **r** é perpendicular ao plano α.
04) INCORRETO.
O triângulo PMN é retângulo.
08) INCORRETO.
A reta **r** é concorrente com o plano α.
16) CORRETO.
No triângulo PMN, temos:
$90° + \theta_1 + \theta_2 = 180°$
$\theta_1 + \theta_2 = 90°$

17.19. A afirmação é verdadeira.
Podemos justificar utilizando o teorema que afirma que, dadas duas retas reversas, existe uma única reta perpendicular às duas.
Observe a figura:



Sejam **r** e **s** retas reversas e **t** a perpendicular comum. Todos os planos perpendiculares à reta **t** serão paralelos às retas **r** e **s**, simultaneamente. Assim, existem infinitos paralelos às duas reversas.

17.20. Observe a figura:



Sendo **d** a distância entre P_i e a reta ℓ, temos:
$$\text{tg}(45°) = \frac{P_iQ}{d} \Rightarrow 1 = \frac{P_iQ}{d} \Rightarrow d = P_iQ_i$$
Assim como os pontos P_1, P_2, P_3, P_4, e P_5 distam, respectivamente, 3 cm, 7 cm, 8 cm, 15 cm e 21 cm da reta ℓ, temos que $P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$ é igual a
3 cm + 7 cm + 8 cm + 15 cm + 21 cm = 54 cm.

Aula 18

18.01. V – F – F – V
(V) $V + F = A + 2$
$12 + F = 30 + 2 \Rightarrow F = 20$
(F) $S_{ti} = 360° \cdot (V - 2)$
$S_{ti} = 360° \cdot (8 - 2) = 2160°$
(F) $F_3 = 20$
• $N = 2A$
$20 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 30$
• $V + F = A + 2$
$V + 20 = 30 + 2 \Rightarrow V = 12$
(V) $V + F = A + 2$
$V + V = A + 2$
$A = 2V - 2$
$A = 2 \cdot (V - 1)$
Portanto, o número de arestas é um número par.

18.02. V – V – V – V
a) VERDADEIRO.
$V + F = A + 2$
$V + 7 = 15 + 2 \Rightarrow V = 10$
b) VERDADEIRO.
$F_3 = 6$
• $N = 2A$
$6 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 9$
c) VERDADEIRO.
Em cada vértice triédrico concorrem 3 arestas.
Assim:
$8 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 12$
d) VERDADEIRO.
$V + F = A + 2$
$V + V = A + 2$
$A = 2V - 2$
$A = 2 \cdot (V - 1)$
Portanto, o número de arestas é um número par.

18.03. c
$F_3 = 20$
• $N = 2A$
$20 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 30$
• $V + F = A + 2$
$V + 20 = 30 + 2 \Rightarrow V = 12$

18.04. e

$F_3 = 8$

- $N = 2A$

  $8 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 12$

- $V + F = A + 2$

  $V + 8 = 12 + 2 \Rightarrow V = 6$

18.05. d

$\begin{cases} F_4 = 3 \\ F_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow F = 3 + 6 = 9$

- $N = 2A$

  $3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 15$

- $V + F = A + 2$

  $V + 9 = 15 + 2 \Rightarrow V = 8$

18.06. a

$\begin{cases} F_3 = 8 \\ F_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow F = 8 + 6 = 14$

- $N = 2A$

  $8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 2A \Rightarrow A = 24$

- $V + F = A + 2$

  $V + 14 = 24 + 2 \Rightarrow V = 12$

18.07. b

$\begin{cases} F_3 = 6 \\ F_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow F = 6 + 5 = 11$

- $N = 2A$

  $6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 2A \Rightarrow A = 19$

- $V + F = A + 2$

  $V + 11 = 19 + 2 \Rightarrow V = 10$

18.08. a

$\begin{cases} F_5 = 12 \\ F_6 = 20 \end{cases} \Rightarrow F = 12 + 20 = 32$

- $N = 2A$

  $12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 2A \Rightarrow A = 90$

- $V + F = A + 2$

  $V + 32 = 90 + 2 \Rightarrow V = 60$

18.09. c

$\begin{cases} F_5 = 12 \\ F_6 = 20 \end{cases} \Rightarrow F = 12 + 20 = 32$

- $N = 2A$

  $12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 2A \Rightarrow A = 90$

- $V + F = A + 2$

  $V + 32 = 90 + 2 \Rightarrow V = 60$

18.10. e

$\begin{cases} F_3 = x \\ F_4 = y \end{cases} \Rightarrow F = x + y$

$A = 20$

$V = 10$

- $N = 2A$

  $3x + 4y = 2 \cdot 20 \Rightarrow 3x + 4y = 40$

- $V + F = A + 2$

  $10 + x + y = 20 + 2 \Rightarrow x + y = 12$

$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow x = 8 \text{ e } y = 4$

Portanto, o número de faces triangulares é 8.

18.11. a

$\begin{cases} F_3 = 4 \\ F_4 = x \end{cases} \Rightarrow F = x + 4$

- $S_{ti} = 360° \cdot (V - 2)$

  $12 \cdot 90° = 360° \cdot (V - 2) \Rightarrow V = 5$

- $N = 2A$

  $4 \cdot 3 + 4x = 2A \Rightarrow A = 2x + 6$

- $V + F = A + 2$

  $5 + x + 4 = 2x + 6 + 2 \Rightarrow x = 1$

Portanto:

$A = 2x + 6$

$A = 2 \cdot 1 + 6$

$A = 8$

18.12. d

$F_3 = 60$

- $N = 2A$

  $60 \cdot 3 = 2A \Rightarrow A = 90$

- $V + F = A + 2$

  $V + 60 = 90 + 2 \Rightarrow V = 32$

18.13. 27 (01, 02, 08, 16)

$\begin{cases} F_5 = 2 \\ F_4 = 4 \Rightarrow F = n + 6 \\ F_3 = n \end{cases}$

$N = 2A$

$2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3n = 2A \Rightarrow A = \dfrac{3n + 26}{2}$

01) CORRETO.

$V + F = A + 2$

$11 + n + 6 = \dfrac{3n + 26}{2} + 2$

$22 + 2n + 12 = 3n + 26 + 4 \Rightarrow n = 4$

02) CORRETO.

$F = 16$

$n + 6 = 16 \Rightarrow n = 10$

04) INCORRETO.

Como $A = \dfrac{3n + 26}{2} = \dfrac{3n}{2} + 13$, então **n** deve ser um número par.

Portanto, o menor valor possível para **n** é 2.

08) CORRETO.

$S_{ti} = 3600°$

$360° \cdot (V - 2) = 3600° \Rightarrow V = 12$

$V + F = A + 2$

$12 + n + 6 = \dfrac{3n + 26}{2} + 2$

$24 + 2n + 12 = 3n + 26 + 4 \Rightarrow n = 6$

16) CORRETO.

$A = 25$

$\dfrac{3n + 26}{2} = 25 \Rightarrow n = 8$

18.14. b

$\begin{cases} F_5 = 12 \\ F_6 = 20 \end{cases} \Rightarrow F = 12 + 20 = 32$

- $N = 2A$

  $12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 2A \Rightarrow A = 90$

• $V+F=A+2$

$V+32=90+2 \Rightarrow V=60$

Portanto, o número de átomos de carbono é 60.

18.15. c

$V=10$

$\begin{cases} F_3=x \\ F_4=y \end{cases} \Rightarrow F=x+y$

$(y, x, x+y)$ PA

$x-y=x+y-x \Rightarrow x=2y$

Assim:

$F=x+y=2y+y=3y$

• $N=2A$

$3x+4y=2A$

$3\cdot 2y+4y=2A \Rightarrow A=5y$

• $V+F=A+2$

$10+3y=5y+2 \Rightarrow y=4$

Portanto, o número de arestas é $A=5\cdot 4=20$.

18.16. 10 (02, 08)

01) INCORRETO.

$F=15$

$V=12$

• $V+F=A+2$

$12+15=A+2 \Rightarrow A=25$

02) CORRETO.

$\begin{cases} F_3=x \\ F_4=y \end{cases} \Rightarrow F=x+y=15$

• $N=2A$

$3x+4y=2\cdot 25$

$\begin{cases} x+y=15 \\ 3x+4y=50 \end{cases} \Rightarrow x=10 \text{ e } y=5$

Portanto, o número de faces quadrangulares é a metade do número de faces triangulares.

04) INCORRETO.

Seja **t** o número de ângulos (vértices) tetraédricos e **p** o número de ângulos (vértices) pentaédricos.

$t+p=V$

$t+p=12$

Em cada vértice tetraédrico concorrem 4 arestas e em cada vértice pentaédrico concorrem 5 arestas.

Assim:

$4t+5p=2A$

$4t+5p=2\cdot 25$

$\begin{cases} t+p=12 \\ 4t+5p=50 \end{cases} \Rightarrow t=10 \text{ e } p=2$

Portanto, o número de ângulos (vértices) tetraédricos é o quíntuplo do número de ângulos (vértices) pentaédricos.

08) CORRETO.

$S_{ti}=360°\cdot(V-2)$

$S_{ti}=360°\cdot(12-2)$

$S_{ti}=3600°=40\cdot 90°$

16) INCORRETO.

O número de ângulos tetraédricos é 10.

18.17. e

$\begin{cases} F_3=12 \\ F_5=x \end{cases} \Rightarrow F=x+12$

$A=3x$

• $N=2A$

$12\cdot 3+5x=2\cdot 3x \Rightarrow x=36$

Soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono:

$S_i=180°\cdot(5-2)=3\cdot 180°$

Como 180° corresponde a π radianos, a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é igual a 3π radianos.

Portanto, a soma das medidas dos ângulos de todas as faces pentagonais é igual a $36\cdot 3\pi=108\pi$ radianos.

18.18. c

$F=7$

1 vértice $\rightarrow$ 6 arestas

$(V-1)$ vértices $\rightarrow$ 3 arestas

Como cada aresta parte de dois vértices do poliedro, temos:

$A=\frac{1\cdot 6+(V-1)\cdot 3}{2}=\frac{3V+3}{2}$

Assim:

$V+F=A+2$

$V+7=\frac{3V+3}{2}+2$

$2V+14=3V+3+4 \Rightarrow V=7$

Portanto, o número de arestas do poliedro é $A=\frac{3\cdot 7+3}{2}=12$.

18.19. 21

$\begin{cases} F_3=10 \\ F_4=10 \\ F_{10}=1 \end{cases} \Rightarrow F=10+10+1=21$

• $N=2A$

$10\cdot 3+10\cdot 4+1\cdot 10=2A \Rightarrow A=40$

• $V+F=A+2$

$V+21=40+2$

$V=21$

18.20.

a) $\begin{cases} F_5=12 \\ F_6=20 \end{cases} \Rightarrow F=12+20=32$

• $N=2A$

$12\cdot 5+20\cdot 6=2A$

$A=90$

b) • $V+F=A+2$

$V+32=90+2$

$V=60$

c) $S_{ti}=360°\cdot(V-2)$

$S_{ti}=360°\cdot(60-2)$

$S_{ti}=20880°$

Anotações

Aula 16

16.01. b

$$\text{sen}160° + \text{sen}40° = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{160° + 40°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{160° - 40°}{2}\right)$$

$$\text{sen}160° + \text{sen}40° = 2 \cdot \text{sen}100° \cdot \cos 60°$$

16.02. d

$$\cos 63° + \cos 17° = 2 \cdot \cos\left(\frac{63° + 17°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{63° - 17°}{2}\right)$$

$$\cos 63° + \cos 17° = 2 \cdot \cos 40° \cdot \cos 23°$$

16.03. a

$$\text{sen}(7x) + \text{sen}(3x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{7x + 3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x - 3x}{2}\right)$$

$$\text{sen}(7x) + \text{sen}(3x) = 2 \cdot \text{sen}(5x) \cdot \cos(2x)$$

16.04. e

$$\cos(7x) - \cos(3x) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{7x + 3x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{7x - 3x}{2}\right)$$

$$\cos(7x) - \cos(3x) = -2 \cdot \text{sen}(5x) \cdot \text{sen}(2x)$$

16.05. a

$$\text{sen}(3x) - \text{sen}x = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x + x}{2}\right)$$

$$\text{sen}(3x) - \text{sen}x = 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos(2x)$$

16.06. a

$$\text{sen}48° - \text{sen}22° = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{48° - 22°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{48° + 22°}{2}\right)$$

$$\text{sen}48° - \text{sen}22° = 2 \cdot \text{sen}13° \cdot \cos 35°$$

16.07. d

$$\text{sen}146° + \text{sen}86° = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{146° + 86°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{146° - 86°}{2}\right)$$

$$\text{sen}146° + \text{sen}86° = 2 \cdot \text{sen}116° \cdot \cos 30°$$

$$\text{sen}146° + \text{sen}86° = 2 \cdot \text{sen}116° \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \text{sen}116°$$

16.08. b

$$\cos(11x) - \cos(5x) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{11x + 5x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{11x - 5x}{2}\right)$$

$$\cos(11x) - \cos(5x) = -2 \cdot \text{sen}(8x) \cdot \text{sen}(3x)$$

16.09. d

$$\cos 70° - \text{sen}60° = \text{sen}20° - \text{sen}60°$$

$$\cos 70° - \text{sen}60° = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{20° - 60°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{20° + 60°}{2}\right)$$

$$\cos 70° - \text{sen}60° = 2 \cdot \text{sen}(-20°) \cdot \cos 40°$$

$$\cos 70° - \text{sen}60° = -2 \cdot \text{sen}20° \cdot \cos 40°$$

16.10. b

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \frac{1}{2} = \text{sen}(x)$$

16.11. c

$$\text{sen}40° + \cos 10° = \text{sen}40° + \text{sen}80°$$

$$\text{sen}40° + \cos 10° = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{40° + 80°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{40° - 80°}{2}\right)$$

$$\text{sen}40° + \cos 10° = 2 \cdot \text{sen}60° \cdot \cos(-20°)$$

$$\text{sen}40° + \cos 10° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 20° = \sqrt{3} \cdot \cos 20°$$

16.12. c

$$\text{sen}2x + \cos 2x + 2\text{sen}^2x = \text{sen}2x + \cos^2 x - \text{sen}^2x + 2\text{sen}^2x$$

$$\text{sen}2x + \cos 2x + 2\text{sen}^2x = \text{sen}2x + \cos^2 x + \text{sen}^2x$$

$$\text{sen}2x + \cos 2x + 2\text{sen}^2x = 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x + 1$$

Observe que:

$$(\text{sen}x + \cos x)^2 = \text{sen}^2x + 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x + \cos^2 x$$

$$(\text{sen}x + \cos x)^2 = 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x + 1$$

Portanto:

$$\text{sen}2x + \cos 2x + 2\text{sen}^2x = (\text{sen}x + \cos x)^2$$

16.13. d

$$\text{sen}(135° + x) + \text{sen}(135° - x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{270°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x}{2}\right)$$

$$\text{sen}(135° + x) + \text{sen}(135° - x) = 2 \cdot \text{sen}135° \cdot \cos x$$

$$\text{sen}(135° + x) + \text{sen}(135° - x) = 2 \cdot \text{sen}45° \cdot \cos x$$

$$\text{sen}(135° + x) + \text{sen}(135° - x) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos x$$

16.14. b

$$\frac{\text{sen}\theta + \text{sen}(5\theta) + 2 \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)} = \frac{\text{sen}\theta + \text{sen}(5\theta)}{\text{sen}(3\theta)} + \frac{2 \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)}$$

$$\frac{\text{sen}\theta + \text{sen}(5\theta) + 2 \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)} = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{6\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-4\theta}{2}\right)}{\text{sen}(3\theta)} + 2$$

$$\frac{\text{sen}\theta + \text{sen}(5\theta) + 2 \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)} = \frac{2 \cdot \text{sen}(3\theta) \cdot \cos(-2\theta)}{\text{sen}(3\theta)} + 2$$

$$\frac{\text{sen}\theta + \text{sen}(5\theta) + 2 \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)} = 2 \cdot \cos(2\theta) + 2$$

$$\frac{\text{sen}\theta + \text{sen}(5\theta) + 2 \cdot \text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)} = 2 \cdot (2 \cdot \cos^2\theta - 1) + 2 = 4 \cdot \cos^2\theta$$

16.15. c

$$\frac{\text{sen}(a - x) + \text{sen}(2a - 3x)}{\cos(a - x) + \cos(2a - 3x)} = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3a - 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-a + 2x}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{3a - 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-a + 2x}{2}\right)}$$

$$\frac{\text{sen}(a - x) + \text{sen}(2a - 3x)}{\cos(a - x) + \cos(2a - 3x)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{3a - 4x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3a - 4x}{2}\right)}$$

$$\frac{\text{sen}(a - x) + \text{sen}(2a - 3x)}{\cos(a - x) + \cos(2a - 3x)} = \text{tg}\left(\frac{3a - 4x}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{3a}{2} - 2x\right)$$

16.16. c

$$\frac{\text{sen}(40°)}{\text{sen}(20°)}-\frac{\cos(40°)}{\cos(20°)}=\frac{\text{sen}40°\cdot\cos20°-\text{sen}20°\cdot\cos40°}{\text{sen}20°\cdot\cos20°}$$

$$\frac{\text{sen}(40°)}{\text{sen}(20°)}-\frac{\cos(40°)}{\cos(20°)}=\frac{\text{sen}(40°-20°)}{\text{sen}20°\cdot\cos20°}$$

$$\frac{\text{sen}(40°)}{\text{sen}(20°)}-\frac{\cos(40°)}{\cos(20°)}=\frac{\text{sen}(20°)}{\text{sen}20°\cdot\cos20°}=\frac{1}{\cos20°}$$

$$\frac{\text{sen}(40°)}{\text{sen}(20°)}-\frac{\cos(40°)}{\cos(20°)}=\sec20°$$

Portanto:

$$P^2-1=\sec^2 20°-1=\text{tg}^2 20$$

16.17. a

$$\cos^4\alpha-\text{sen}^4\alpha+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=$$

$$=(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=$$

$$=1\cdot(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=$$

$$=2\cdot(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=2\cdot\cos(2\alpha)$$

16.18. a

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\text{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\text{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\text{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta$$

16.19. $\sqrt{3}$

$$\frac{\text{sen}100°+\text{sen}20°}{\cos100°+\cos20°}=\frac{2\cdot\text{sen}\left(\frac{100°+20°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{100°-20°}{2}\right)}{2\cdot\cos\left(\frac{100°+20°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{100°-20°}{2}\right)}$$

$$\frac{\text{sen}100°+\text{sen}20°}{\cos100°+\cos20°}=\frac{\text{sen}60°\cdot\cos40°}{\cos60°\cdot\cos40°}=\frac{\text{sen}60°}{\cos60°}=\text{tg}60°=\sqrt{3}$$

16.20. $-\text{cotg}(x)$

$$\frac{\text{sen}6x+\text{sen}4x}{\cos6x-\cos4x}=\frac{2\cdot\text{sen}\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)}{-2\cdot\text{sen}\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{6x-4x}{2}\right)}$$

$$\frac{\text{sen}6x+\text{sen}4x}{\cos6x-\cos4x}=\frac{\text{sen}(5x)\cdot\cos(x)}{-\text{sen}(5x)\cdot\text{sen}(x)}$$

$$\frac{\text{sen}6x+\text{sen}4x}{\cos6x-\cos4x}=\frac{\cos(x)}{-\text{sen}(x)}=-\text{cotg}(x)$$

Aula 17

17.01. c

No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\cos x=1$ para $x=0$ e para $x=2\pi$. Portanto, o número total de soluções é 2.

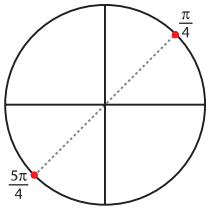
17.02. c

$\text{sen}^2x=1\Rightarrow \text{sen}x=1$ ou $\text{sen}x=-1$

No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\text{sen}x=1$ para $x=\frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}x=-1$ para $x=\frac{3\pi}{2}$. Portanto, a soma das soluções é $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi$.

17.03. a

Os arcos tais que a tangente é igual a 1 têm extremidade no primeiro ou no terceiro quadrante. A solução do primeiro quadrante e da primeira volta positiva é $\frac{\pi}{4}$.



Portanto, a expressão geral de todas as soluções da equação é $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

17.04. a

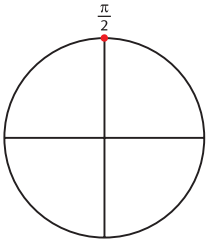
$\text{sen}x-\cos x=0$

$\text{sen}x=\cos x\Rightarrow \text{tg}x=1$

Como $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ e $\text{tg}x=1$, então $x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$.

17.05. a

A solução da primeira volta positiva é $\frac{\pi}{2}$.



Portanto:

$$2x=\frac{\pi}{2}+k\cdot2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$$

O conjunto-solução da equação é:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

17.06. c

$\sqrt{3}\cdot \text{sen}(x) = 1{,}5$

$\text{sen}(x) = \frac{1{,}5}{\sqrt{3}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x = \frac{\pi}{3}$ e para $x = \frac{2\pi}{3}$. Portanto, a equação tem duas soluções no intervalo de 0 a 2π, uma no primeiro quadrante e outra no segundo quadrante.

17.07. a

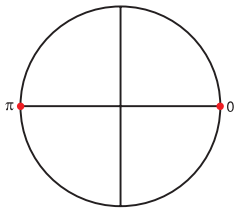
$\frac{3}{2} + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Se $x \in \mathbb{R}$, então $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Portanto, o número de raízes reais da equação é 0.

17.08. c

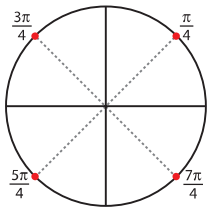
$\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -1$



A solução geral da equação é $x = k\cdot\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

17.09. a

$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1 \text{ ou } \text{tg}x = -1$



No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\text{tg}x = 1$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e para $x = \frac{5\pi}{4}$, enquanto $\text{tg}x = -1$ para $x = \frac{3\pi}{4}$ e para $x = \frac{7\pi}{4}$. Portanto, o número total de soluções é 4.

17.10. c

$2\cdot 2^{\text{sen}x} = \sqrt{2}$

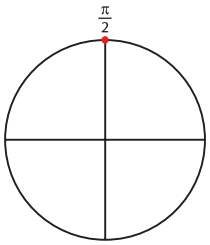
$2^{1+\text{sen}x} = 2^{\frac{1}{2}}$

$1 + \text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}x = -\frac{1}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\text{sen}x = -\frac{1}{2}$ para $x = \frac{7\pi}{6}$ e para $x = \frac{11\pi}{6}$. A soma das soluções é $\frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{18}{6} = 3\pi$.

17.11. a

A solução da primeira volta positiva é $\frac{\pi}{2}$.



Portanto:

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$

17.12. e

$\text{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\text{sen}(x) = \sqrt{\text{sen}^2 x}$

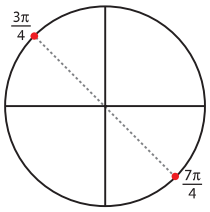
$\text{sen}(x) = |\text{sen}(x)|$

A igualdade anterior é verdadeira quando $\text{sen}(x) \geq 0$. Portanto, se $0 \leq x \leq 2\pi$ e $\text{sen}(x) \geq 0$, então $x \in [0, \pi]$.

17.13. a

$\text{sen}x + \cos x = 0$

$\text{sen}x = -\cos x \Rightarrow \text{tg}x = -1$



A solução geral da equação é $x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Outra possível maneira de expressar a solução geral da equação é $x = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, pois $\frac{7\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$ são arcos côngruos.

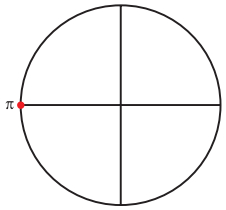
17.14. e

Como a frequência é de 100 batimentos por minuto, cada batimento se dá em $\frac{60}{100} = 0{,}6$ segundo. O período da função é $\frac{2\pi}{|\theta|}$. Como cada batimento se dá em um período da função, temos:

$\frac{2\pi}{|\theta|} = 0{,}6 \Rightarrow |\theta| = \frac{2\pi}{0{,}6} = \frac{2\pi}{\frac{6}{10}} = 2\pi\cdot\frac{10}{6} = \frac{10\pi}{3}$

Considerando apenas o valor positivo de θ, tem-se que $\theta = \frac{10\pi}{3}$.

17.15. d



$3x = \pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$

No intervalo $[-\pi, \pi]$, temos:

$-\pi \leq x \leq \pi$

$-\pi \leq \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq \pi$

$-1 \leq \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} \leq 1$

$-\frac{4}{3} \leq \frac{2k}{3} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -4 \leq 2k \leq 2 \Rightarrow -2 \leq k \leq 1$

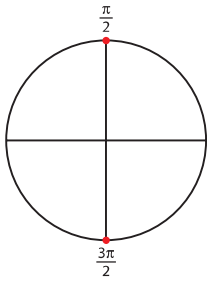
Assim, existem 4 valores possíveis para **k** $(-2, -1, 0, 1)$.
Portanto, o número de soluções é 4.

17.16. c

$3^{\cos(2x)} = 1$

$3^{\cos(2x)} = 3^0$

$\cos(2x) = 0$



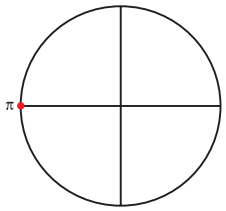
$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

17.17. d

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 2$ ou $\cos x = -1$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, tem-se que $\cos x = -1$.



$x = \pi + k \cdot 2\pi$

No intervalo $[0, 4\pi]$, temos:

$0 \leq x \leq 4\pi$

$0 \leq \pi + k \cdot 2\pi \leq 4\pi$

$-\pi \leq k \cdot 2\pi \leq 3\pi$

$-1 \leq 2k \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$

Portanto:

$k = 0 \Rightarrow x = \pi + 0 \cdot 2\pi = \pi$

$k = 1 \Rightarrow x = \pi + 1 \cdot 2\pi = 3\pi$

A soma das soluções é $\pi + 3\pi = 4\pi$.

17.18. b

$2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 1$ ou $\text{sen}x = \frac{1}{2}$

Como **p** e **q** são duas soluções da equação tais que $\text{sen}p \neq \text{sen}q$, então $\text{sen}p = 1$ e $\text{sen}q = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}p = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}q = 1$.

Portanto:

$\text{sen}^2 p - \cos^2 q = \text{sen}^2 p - (1 - \text{sen}^2 q)$

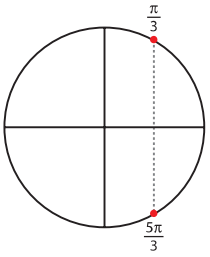
$\text{sen}^2 p - \cos^2 q = \text{sen}^2 p + \text{sen}^2 q - 1$

$\text{sen}^2 p - \cos^2 q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - 1$

$\text{sen}^2 p - \cos^2 q = \frac{1}{4} = 0{,}25$

17.19.

$\cos(2x) = \frac{1}{2}$



$2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$

Portanto, o conjunto-solução da equação é:

$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

17.20.

$x^2 - 2x\cos\theta + \text{sen}^2\theta = 0$

Como a equação tem raízes reais iguais, o discriminante é igual a zero.

$\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}^2\theta$

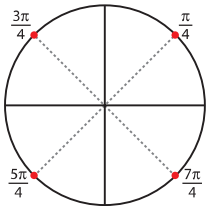
$\Delta = 4 \cdot \cos^2\theta - 4 \cdot \text{sen}^2\theta$

$\Delta = 0$

$4\cdot\cos^2\theta-4\cdot\text{sen}^2\theta=0$

$\cos^2\theta=\text{sen}^2\theta$

$\text{tg}^2\theta=1\Rightarrow \text{tg}\theta=1$ ou $\text{tg}\theta=-1$



No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\text{tg}\theta=1$ para $\theta=\frac{\pi}{4}$ e para $\theta=\frac{5\pi}{4}$, enquanto $\text{tg}\theta=-1$ para $\theta=\frac{3\pi}{4}$ e para $\theta=\frac{7\pi}{4}$.

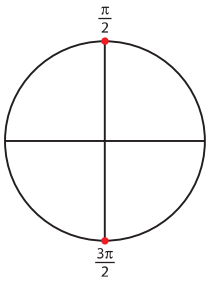
Portanto, o conjunto-solução da equação é:

$$\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Aula 18

18.01. a

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$



$$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$$

$$3x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{3}$$

Como $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, temos:

$$k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+0\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$$

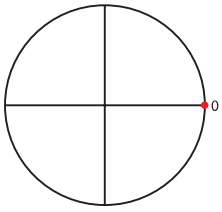
18.02. d

$3\cdot(1-\cos x)=\text{sen}^2x$

$3\cdot(1-\cos x)=1-\cos^2x$

$\cos^2x-3\cdot\cos x+2=0\Rightarrow\cos x=1$ ou $\cos x=2$

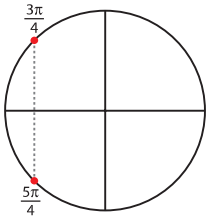
Como $-1\le\cos x\le1$, tem-se que $\cos x=1$.



A solução geral da equação é $x=k\cdot2\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

18.03. c

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot2\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{4}+k\cdot2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

18.04. c

$2\text{sen}^2x+\cos x=1$

$2\cdot(1-\cos^2x)+\cos x=1$

$2\cdot\cos^2x-\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=1$ ou $\cos x=-\frac{1}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, tem-se que $\cos x=1$ para $x=0$ e para $x=2\pi$, enquanto $\cos x=-\frac{1}{2}$ para $x=\frac{2\pi}{3}$ e para $x=\frac{4\pi}{3}$. Portanto, a maior raiz da equação é 2π.

18.05. b

$\cos x\cdot\text{tg}x-\cos x=0$

$\cos x\cdot(\text{tg}x-1)=0$

$\cos x=0$ ou $\text{tg}x=1$

Para que tgx esteja definida, $\cos x\neq0$.
Assim, no intervalo $[0, 2\pi]$ temos:

$$\text{tg}x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\text{ ou }x=\frac{5\pi}{4}$$

A soma das soluções é $\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$.

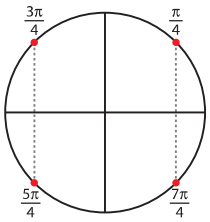
18.06. c

$\text{sen}^2x+3\cdot\cos^2x=2$

$1-\cos^2x+3\cdot\cos^2x=2$

$2\cdot\cos^2x=1$

$\cos^2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



No intervalo $[\pi, 4\pi]$, temos:

$x=\frac{7\pi}{4}$ ou

$x=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{9\pi}{4}$ ou

$x=\frac{7\pi}{4}+2\pi=\frac{15\pi}{4}$ ou

$x=\frac{5\pi}{4}$ ou

$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{11\pi}{4}$ ou

$x=\frac{5\pi}{4}+2\pi=\frac{13\pi}{4}$

O número exato de soluções é 6.

18.07. d

Como a função $y=\text{sen}(x)$ é ímpar, então $\text{sen}(-x)=-\text{sen}x$.

$\text{sen}^2x-\text{sen}(-x)=0$

$\text{sen}^2x+\text{sen}x=0$

$\text{sen}x\cdot(\text{sen}x+1)=0\Rightarrow\text{sen}x=0$ ou $\text{sen}x=-1$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\text{sen}x=0\Rightarrow x=0$ ou $x=\pi$ ou $x=2\pi$

$\text{sen}x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$

A soma das raízes é $0+\pi+2\pi+\frac{3\pi}{2}=\frac{9\pi}{2}$.

18.08. e

$\text{sen}2x=\text{cotg}x$

$2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\text{sen}x}$

$\cos x\cdot\left(2\text{sen}^2x-1\right)=0\Rightarrow\cos x=0$ ou $2\text{sen}^2x-1=0$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{3\pi}{2}$

$2\text{sen}^2x-1=0\Rightarrow\text{sen}^2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\text{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{3\pi}{4}$

$\text{sen}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{4}$ ou $x=\frac{7\pi}{4}$

O número de soluções é 6.

18.09. d

$\sec^2x=1+\text{tg}x$

$1+\text{tg}^2x=1+\text{tg}x$

$\text{tg}^2x-\text{tg}x=0$

$\text{tg}x\cdot(\text{tg}x-1)=0\Rightarrow\text{tg}x=0$ ou $\text{tg}x=1$

No intervalo $]0, \pi]$, temos:

$\text{tg}x=0\Rightarrow x=0$ ou $x=\pi$

$\text{tg}x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

A soma das raízes é $0+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

18.10. c

$\text{cossec}x=\text{cotg}x+2\text{sen}x$

$\frac{1}{\text{sen}x}=\frac{\cos x}{\text{sen}x}+2\text{sen}x$

$1=\cos x+2\text{sen}^2x$

$1=\cos x+2\cdot(1-\cos^2x)$

$2\cdot\cos^2x-\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=1$ ou $\cos x=-\frac{1}{2}$

Observe que como $\text{sen}x\neq0$ (condição de existência de $\text{cossec}x$ e de $\text{cotg}x$), tem-se que $\cos x\neq1$ e $\cos x\neq-1$.

Assim, no intervalo $[0°, 360°]$, temos:

$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=120°$ ou $x=240°$

18.11. c

$\cos x=\text{tan}x$

$\cos x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}$

$\cos^2x=\text{sen}x$

$1-\text{sen}^2x=\text{sen}x$

$\text{sen}^2x+\text{sen}x-1=0$

$\text{sen}x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\text{sen}x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\text{sen}x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Como $-1\leq\text{sen}x\leq1$, então $\text{sen}x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

18.12. e

$\text{sen}(2\theta)=\text{tg}(\theta)$

$2\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta=\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\text{sen}\theta\cdot(2\cos^2\theta-1)=0\Rightarrow\text{sen}\theta=0$ ou $2\cos^2\theta-1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\text{sen}\theta=0$ ou $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, dentre as alternativas, o valor de θ é $\frac{3\pi}{4}$, pois $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.13. c

$\text{sen}^4x-\cos^4x=\frac{1}{2}$

$(\text{sen}^2x+\cos^2x)\cdot(\text{sen}^2x-\cos^2x)=\frac{1}{2}$

$1\cdot(1-\cos^2x-\cos^2x)=\frac{1}{2}$

$\cos^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$ ou $\cos x=-\frac{1}{2}$

O intervalo $[0, 35\pi]$ corresponde a 17 voltas e meia. A cada meia volta as equações $\cos x = \frac{1}{2}$ e $\cos x = -\frac{1}{2}$ têm uma solução cada.

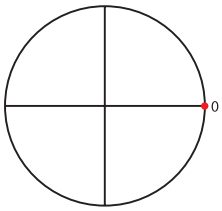
Portanto, o número de soluções no intervalo $[0, 35\pi]$ é $35 \cdot 2 = 70$.

18.14. e

$\cos(3x) \cdot \cos(x) + \text{sen}(3x) \cdot \text{sen}(x) = 1$

$\cos(3x - x) = 1$

$\cos(2x) = 1$



$2x = k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot \pi$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$k = 0 \Rightarrow x = 0 \cdot \pi = 0$

$k = 1 \Rightarrow x = 1 \cdot \pi = \pi$

$k = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot \pi = 2\pi$

O número de soluções é 3.

18.15. a

$|1 - 8x| \leq 3$

$-3 \leq 1 - 8x \leq 3 \Rightarrow -4 \leq -8x \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Assim, $a = -\frac{1}{4}$ e $\text{sen}(y) = -\frac{1}{4}$.

$\text{sen}(2y) = k \cdot \text{cotg}(y)$

$k = \frac{\text{sen}(2y)}{\text{cotg}(y)} = \frac{2 \cdot \text{sen}(y) \cdot \cos(y)}{\frac{\cos(y)}{\text{sen}(y)}} = 2 \cdot \text{sen}^2(y)$

$k = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

18.16. a

$\cos^4 x - 4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

O primeiro membro da igualdade é o desenvolvimento de um binômio de Newton.

$(\cos x - 1)^4 = 0$

$\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1$

A solução geral da equação é $x = k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

18.17. 15

$(1 - 2\text{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 0$

$\left(1 - 2 \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) \cdot \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 0$

$\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x = 0$

$1 - 2\text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, então $x = \frac{5\pi}{4}$.

Portanto:

$\frac{12x}{\pi} = \frac{12 \cdot \frac{5\pi}{4}}{\pi} = 15$

18.18. c

$2\cos^2 x + \cos(2x) = 0$

$2\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

$4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

No intervalo $[0, \pi]$, tem-se que $\cos x = \frac{1}{2}$ para $x = \frac{\pi}{3}$ e $\cos x = -\frac{1}{2}$ para $x = \frac{2\pi}{3}$.

A soma das raízes é $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

18.19.

$\sec x - \cos x + \text{sen} x = 0$

$\frac{1}{\cos x} - \cos x + \text{sen} x = 0$

$1 - \cos^2 x + \text{sen} x \cdot \cos x = 0$

$\text{sen}^2 x + \text{sen} x \cdot \cos x = 0$

$\text{sen} x \cdot (\text{sen} x + \cos x) = 0$

$\text{sen} x = 0$ ou $\text{sen} x + \cos x = 0$

$\text{sen} x = 0$ ou $\text{sen} x = -\cos x$

$\text{sen} x = 0$ ou $\text{tg} x = -1$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\text{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

$\text{tg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Portanto, o conjunto-solução da equação é:

$\left\{0, \pi, 2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

18.20.

C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

Como o ponto $P = (2\cos 2\theta, 3\text{sen}\theta)$ pertence à curva **C**, temos:

$\frac{(2\cos 2\theta)^2}{4} + \frac{(3\text{sen}\theta)^2}{3} = 1$

$\cos^2 2\theta + 3\text{sen}^2\theta = 1$

$(1 - 2\text{sen}^2\theta)^2 + 3\text{sen}^2\theta = 1$

$1 - 4\text{sen}^2\theta + 4\text{sen}^4\theta + 3\text{sen}^2\theta = 1$

$4\text{sen}^4\theta - \text{sen}^2\theta = 0$

$\text{sen}^2\theta \cdot (4\text{sen}^2\theta - 1) = 0$

$\text{sen}^2\theta = 0$ ou $4\text{sen}^2\theta - 1 = 0$

$\text{sen}\theta = 0$ ou $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}$

No intervalo $[0, \pi]$, temos:

$\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

$\text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\text{sen}\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ não existe $\theta \in [0, \pi]$

Os possíveis valores de θ são:

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi$